

# 1 Аннотация

В дипломе исследуется вопрос постановки начальных условий для решения уравнений ЕОВ в двух случаях: если орбита круговая и некруговая. В первом случае ищутся начальные условия для импульсов на соответствующем расстоянии от центра слияния, во втором случае изучается возможность подправки параметров орбиты из-за влияния радиационных сил. Помимо всего прочего исследуется возможность построения аналитического решения дифференциального уравнения ЕОВ в самом общем случае. В дополнение к этому анализируются уравнения эволюции параметра орбиты. Все это требует усреднения всех радиационных сил за период обращения. Для повышения точности и учета осцилляционных слагаемых рассмотрены различные методы, дающие это.

# 2 Общеизвестные факты

В настоящее время лучшая теория для описания гравитации - это общая теория относительности, разработанная Эйнштейном в 1916 году. В этой теории массой вещества задается искривление пространства-времени, описываемое формулой:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1)$$

где  $g_{\mu\nu}$  - метрика пространства-времени, задающая движение тел во Вселенной. Тензор Римана определяется через эту метрику следующим образом:

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\rho} = \partial_{\kappa}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \partial_{\mu}\Gamma_{\kappa\nu}^{\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\Gamma_{\kappa\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} \quad (2)$$

Где  $\Gamma_{\kappa\sigma}^{\rho}$  - символ Кристоффеля. Зная вид тензора Римана, можно определить скаляр и тензор Риччи.

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^{\rho} \quad (3)$$

$$R = R_{\mu}^{\mu} \quad (4)$$

Теоретическое открытие гравитационных волн произошло в том же 1916 году на основе создания линеаризованной теории. Возьмем метрику Минковского и слегка возбудим ее.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (5)$$

где  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . В этом приближении уравнения Эйнштейна приводят к виду:

$$\square h_{\mu\nu} + \partial_{\mu}\partial_{\nu}h - \partial_{\mu}\partial_{\rho}h^{\rho\nu} - \partial_{\nu}\partial_{\rho}h_{\mu}^{\rho} = -\frac{16\pi G}{c^4}S_{\mu\nu} \quad (6)$$

где  $S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T$  Воспользуемся свободой калибровки:

$$\partial_{\mu}h_{\nu}^{\mu} = \frac{1}{2}\partial_{\nu}h \quad (7)$$

В итоге получаем

$$\square h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}S_{\mu\nu} \quad (8)$$

Таким образом, мы убеждаемся в волновой природе решения. Это уравнение задает возмущения пространства-времени, распространяющиеся на бесконечное расстояние, названные гравитационными волнами.

Убедимся в парочке дополнительных свойств, присущих гравитационным волнам. Воспользуемся всеми возможными калибровками

$$h_{0\mu} = 0 \text{ and } h = 0 \quad (9)$$

примененные совместно с гармоническим калибровочным условием, получаем

$$\partial^i h_{ij} = 0 \quad (10)$$

$$h_{ij}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_- & 0 \\ 0 & h_- & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\omega(t - \frac{z}{c})} \quad (11)$$

Две величины  $h_+$ ,  $h_-$  соответствуют двум различным направлениям поляризации GW, которые растягивают и сжимают пространство-время.

### 3 Теоретические аспекты ЕОВ

Сеть наземных детекторов гравитационных волн в настоящее время достигла необходимой чувствительности и теперь могут детектировать их. Сталкивающиеся черные дыры являются одними из наиболее перспективных и наиболее интересных источников гравитационно-волнового сигнала. Но прежде чем успешно обнаруживать черные дыры и определять довольно точно параметры сталкивающейся системы, необходима теория, согласно которой можно вычислять орбиты сталкивающихся тел. Прежде всего отмечу, что один из путей - решение с применением возможностей компьютера. Однако время вычисления одной орбиты очень велико, поэтому перебор всех орбит невозможен, а аналитическое исследование затруднено.

Возможность создавать простое аналитическое описание движения и излучения двойных черных дыр дала Effective One Body теория. Ее предсказания достаточно точно описывают поведение гравитационно-волнового сигнала в точках не столь близких к слиянию (сравнение проводилось с численными расчетами).

Прежде всего отметим, что подход ЕОВ состоит из трех компонент:

1. описания консервативной части динамики двух черных дыр
2. выражения радиационно-реакционной части динамики
3. описания формы GW, испускаемой двойной системой

Для каждого из этих компонент основными входными данными, которые используются в построении ЕОВ, являются расширенные результаты постньютоновских поправок, полученные многими годами работы многих исследователей. Отмечу, что подход ЕОВ каждый раз улучшается путем систематического сравнения различных форм сигналов, полученных из ЕОВ, с точными формами сигналов. Среди прочего рассматривается предел отношения масс  $\nu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$ . В этом пределе хорошо моделируется движение пробных частиц численно.

Начнем с первого метода, используемого в ЕОВ: систематического использования пересуммирования. Примером использования этого метода явилась аппроксимация Паде, примененная к силе радиационной реакции. Также этот метод необходим для описания динамики в ЕОВ. Продемонстрируем его суть на уровне 2PN. Отправной точкой метода является 2PN гамильтониан, описывающий консервативную или симметричную по

времени часть уравнений движения. Перейдем к центру масс системы, откуда получаем PN-расширенный гамильтониан, описывающий относительное движение  $q = q_1 - q_2$ ,  $p = p_1 = -p_2$

$$H_0(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{q} \quad (12)$$

$$H_{2PN}^{relative}(q,p) = H_0(q,p) + \frac{1}{c^2}H_1(q,p) + \frac{1}{c^4}H_2(q,p) \quad (13)$$

$$H_1(q,p) = \frac{1}{8}(3\eta - 1)p^4 \frac{1}{2}[(3 + \eta)p^2 + \eta p_r^2] \frac{1}{q} + \frac{1}{2q^2} \quad (14)$$

$$H_2(q,p) = \frac{1}{16}(1 - 5\eta + 5\eta^2)p^6 + \frac{1}{8}[(5 - 20\eta - 3\eta^2)p^4 - 2\eta^2 p_r^2 p^2 - 3\eta^2 p_r^4] \frac{1}{q} \quad (15)$$

$$+ \frac{1}{2}[(5 + 8\eta)p^2 + 3\eta p_r^2] \frac{1}{q^2} - \frac{1}{4}(1 + 3\eta) \frac{1}{q^3} \quad (16)$$

где  $H_1$  описывает 1PN поправки,  $H_2$  - 2PN. Хорошо известно, что в ньютоновском приближении  $H_0(q,p)$  можно рассматривать как описание "пробной частицы" с массой  $\mu$ , вращающейся вокруг некой внешней массы. Подход ЕОВ является общим релятивистским обобщением этого факта. Мы ищем геометрию внешнего пространства времени  $g_{\mu\nu}^{ext}$  такую, чтоб геодезическая динамика пробной частицы массы  $\mu$  в пределах  $g_{\mu\nu}^{ext}$  была эквивалентна исходной относительной PN-расширенной динамике.

Поясним идею, предложенную в [8,9], основанную на квантовомеханическом мышлении. Вместо того, чтобы думать в терминах классического гамильтониана, мы можем думать в терминах квантованных уровней энергии  $E(n,l)$  связанных состояний гамильтонова оператора. Здесь (для сферически-симметричного взаимодействия) параметризуем полный орбитальный угловой момент ( $\vec{L} = l(l+1)\hbar$ ), а  $n$  выступает в роли главного квантового числа. Например, нерелятивистское Кулоновское взаимодействие дает известный результат:

$$H_0 = \frac{1}{2\mu}p^2 + \frac{GM\mu}{|q|} \quad (17)$$

$$E_0(n,l) = -\frac{1}{2}\mu \left(\frac{GM\mu}{n\hbar}\right)^2 \quad (18)$$

Энергия зависит только от  $n$ . Рассматривая PN приближения к  $H_0$ , можно получить более сложную формулу:

$$E_0(n,l) = -\frac{1}{2}\mu \frac{\alpha^2}{n^2} \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{c^2} \left( \frac{c_{11}}{nl} + \frac{c_{20}}{n^2} \right) + \frac{\alpha^4}{c^4} \left( \frac{c_{13}}{nl^3} + \frac{c_{22}}{n^2 l^2} + \frac{c_{31}}{n^3 l} + \frac{c_{40}}{n^4} \right) \right] \quad (19)$$

где мы имеем  $\alpha = GM\mu/\hbar$ . Здесь же мы рассматриваем для упрощения квази-классический предел, где  $n, l$  - большие числа. Безразмерные коэффициенты  $c_{pq}$  являются функциями  $\nu = \mu/M$ . Например,  $c_{40} = \frac{1}{8}(145 - 15\nu + \nu^2)$ . В классической механике его называют Гамильтонианом Делони.

Теперь рассмотрим вспомогательную проблему: эффективную динамику одного тела с массой  $\mu$  на геодезической по некоторой внешней метрике.

$$g_{\mu\nu}^{ext} dx^\mu dx^\nu = -A(R)c^2 dT^2 + B(R)dR^2 + R^2(d\Theta^2) + \sin^2\Theta d\phi^2 \quad (20)$$

Здесь а priori неизвестны метрические функции  $A(R)$  и  $B(R)$ , которые представляются в форме:

$$A(R) = 1 + a_1 \frac{GM}{c^2 R} + a_2 \left(\frac{GM}{c^2 R}\right)^2 + a_3 \left(\frac{GM}{c^2 R}\right)^3 \quad (21)$$

$$B(R) = 1 + b_1 \frac{GM}{c^2 R} + b_2 \left(\frac{GM}{c^2 R}\right)^2 \quad (22)$$

где безразмерные коэффициенты  $a_n, b_n$  зависят от  $\nu$ . Из ньютоновского предела точно известно, что  $a_1 = -2$ .

Разрешая путем разделения переменных эффективное уравнение Гамильтона-Якоби

$$g_{eff}^{\mu\nu} \frac{\partial S_{eff}}{\partial x^\mu} \frac{\partial S_{eff}}{\partial x^\nu} + \mu^2 c^2 = 0 \quad (23)$$

$$S_{eff} = -E_{eff} t + J_{eff} \phi + S_{eff}(R) \quad (24)$$

можно непосредственно вычислить Гамильтониан Делони. Эффективная энергия принимает вид:

$$E_{eff}(n_{eff}, l_{eff}) = -\frac{1}{2} \mu \frac{\alpha^2}{n_{eff}^2} \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{c^2} \left( \frac{c_{11}^{eff}}{n_{eff} l_{eff}} + \frac{c_{20}^{eff}}{n_{eff}^2} \right) + \frac{\alpha^4}{c^4} \left( \frac{c_{13}^{eff}}{n_{eff}^3 l_{eff}^3} + \frac{c_{22}^{eff}}{n_{eff}^2 l_{eff}^2} + \frac{c_{31}^{eff}}{n_{eff}^3 l_{eff}} + \frac{c_{40}^{eff}}{n_{eff}^4} \right) \right] \quad (25)$$

где теперь безразмерные коэффициенты  $c_{pq}^{eff}$  являются функциями от неизвестных коэффициентов  $a_n, b_n$ .

На этом этапе определим взаимосвязь между реальной динамикой двух тел и эффективной одночастичной. Поскольку с обеих сторон квантовая механика говорит нам, что переменные действия квантованы в целые числа, то наиболее естественно отождествить  $n = n_{eff}, l = l_{eff}$ . Тогда еще нужно правило для соотношения двух разных энергий: реального и эффективного. Был предложен следующий метод:

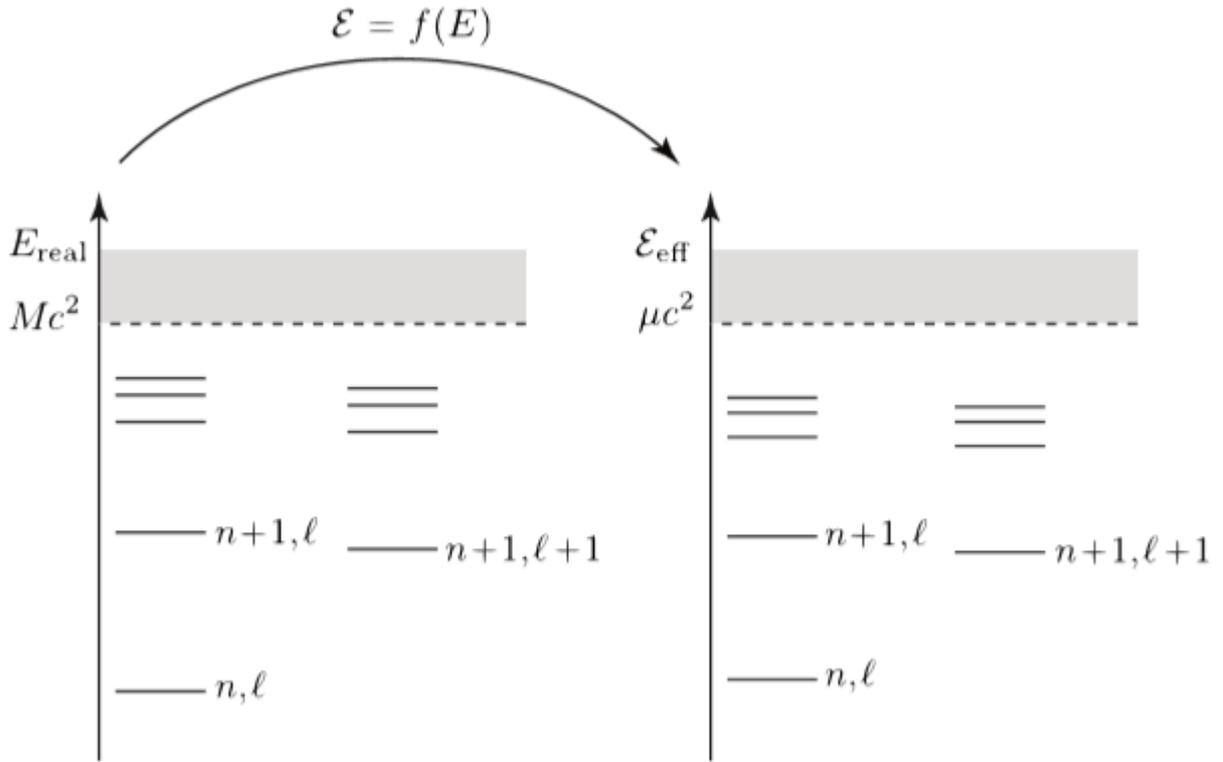
$$\frac{E_{eff}}{\mu c^2} - 1 = F\left(\frac{E_{real}^{relative}}{\mu c^2}\right) = \frac{E_{real}^{relative}}{\mu c^2} \left( 1 + \alpha_1 \frac{E_{real}^{relative}}{\mu c^2} + \alpha_2 \left(\frac{E_{real}^{relative}}{\mu c^2}\right)^2 + \dots \right) \quad (26)$$

Данное отождествление дает шесть уравнений, связывающие все коэффициенты. Естественно положить  $b_1 = 2$ , чтоб линеаризованная эффективная метрика совпала с линеаризованной метрикой Шварцшильда. Тогда оказывается, что существует единственное решение для оставшихся пяти неизвестных коэффициентов ( $a_2, a_3, b_2, \alpha_1, \alpha_2$ ):

$$a_2 = 0, \dots a_3 = 2\nu, \dots b_2 = 4 - 6\nu, \dots \alpha_1 = \frac{\nu}{2}, \dots \alpha_2 = 0 \quad (27)$$

Так получаем взаимосвязь между двумя энергиями:

$$\frac{E_{eff}}{\mu c^2} = 1 + \frac{E_{real}^{relative}}{\mu c^2} \left( 1 + \frac{\nu}{2} \frac{E_{real}^{relative}}{\mu c^2} \right) \quad (28)$$



Отсюда можно получить выражения для  $A(R)$  с 2PN точностью.

$$A_{2PN} = 1 - 2u + 2\nu u^3 \quad (29)$$

где  $u = GM/c^2 R$  и  $\nu = \mu/M = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)^2$

Подчеркнем замечательную простоту результата 2PN. Гамильтониан 2PN содержит одиннадцать довольно сложных  $\nu$ -зависимых членов. После преобразования в формат ЕОВ динамическая информация, содержащаяся в этих одиннадцати коэффициентах, уплотняется в простой дополнительный вклад ( $2\nu u^3$ ). Этот процесс становится изящнее, если перейти к следующему постньютоновскому порядку. Однако подчеркну, что получение следующих порядков - это теоретическая проблема: появляется большое количество  $\nu$ -зависимых коэффициентов. После преобразования в ЕОВ все уплотняется. К примеру, для 3PN уточнения появляются дополнительные вклады в  $A(R)$ ,  $B(R)$ . Например, метрический коэффициент от 3PN поправок выкладит так:

$$A_{3PN} = 1 - 2u + 2\nu u^3 + a_4 \nu u^4 \quad (30)$$

где  $a_4 = \frac{94}{3} - \frac{41}{32}\pi^2$

Что ж мы описали, как метод ЕОВ кодирует консервативную часть орбитальной динамики. Теперь время обсудить, как завершить динамику ЕОВ, правильно определив радиационные эффекты. Для этого, раз мы рассматриваем Гамильтонову механику, нужно всего лишь определить силы, влияющие на импульсы частиц. Мы воспользуемся переменными фазового пространства  $r, p_r, \phi, p_\phi$ , связанные с полярными координатами (для простоты рассмотрим движение в экваториальной плоскости). Запишем начальный Гамильтониан

$$H_{EOB} = M \sqrt{1 + 2\nu \left( \frac{H_{eff}}{\mu} - 1 \right)} \quad (31)$$

$$H_{eff} = \sqrt{A(r) \left( 1 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + \frac{p_r^2}{B(r)} + z_3 \frac{p_r^4}{r^2} \right)} \quad (32)$$

где  $z_3 = 2\nu(4 - 3\nu)$

Запишем уравнения Гамильтона:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H_{EOB}}{\partial p_r} \quad (33)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial H_{EOB}}{\partial p_\phi} \quad (34)$$

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H_{EOB}}{\partial r} + F_r \quad (35)$$

$$\frac{dp_\phi}{dt} = -\frac{\partial H_{EOB}}{\partial \phi} + F_\phi \quad (36)$$

Заранее замечу, что  $\frac{\partial H_{EOB}}{\partial \phi} = 0$  и здесь мы используем переопределенные безразмерные переменные :  $r = R/GM, p_r = P_r/\mu, p_\phi = P_\phi/\mu GM$ , также как и время  $t = T/GM$ .

Обмолвимся, данные уравнения абсолютно никак не учитывают влияние спинов тел на динамику системы. Давайте рассмотрим данный вопрос поподробнее. Особенности Гамильтонова подхода позволяют добавлять дополнительные члены к  $H_{eff}$ , которые бы учитывали другие виды взаимодействия. Так мы и поступим.

$$H_{eff} = H_{eff}^{orb} + \frac{\nu}{c^2 r^2} (G_s (\vec{L}\vec{S}) + G_{s*} (\vec{L}\vec{S}_*)) \quad (37)$$

где  $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2, \vec{S}_* = \frac{m_2}{m_1} \vec{S}_1 + \frac{m_1}{m_2} \vec{S}_2$ , при том спины тоже записаны в безразмерных величинах. Коэффициенты  $G_s, G_{s*}$  являются функциями от  $r, p$ . Они могут быть записаны в разных трактовках, но мы запишем в той, где эти коэффициенты зависят только от  $p_r$ .

$$G_s = 2 + \frac{1}{c^2} \left( -\frac{5}{8} \nu \frac{1}{r} - \frac{27}{8} \nu p_r^2 \right) + \frac{1}{c^4} \left( \nu \left( -\frac{51}{4} \frac{1}{r^2} - \frac{21}{2} \frac{1}{r} p_r^2 + \frac{5}{8} p_r^4 \right) + \dots \right) + \dots \quad (38)$$

$$G_{s*} = \frac{3}{2} + \frac{1}{c^2} \left( -\frac{9}{8} \frac{1}{r} - \frac{15}{8} p_r^2 + \nu \left( -\frac{3}{4} \frac{1}{r} - \frac{9}{4} p_r^2 \right) \right) + \dots \quad (39)$$

## 4 Начальные условия для круговой орбиты

Перейдем к сути данной работы. Для интегрирования уравнений ЕОВ необходимо знать начальные условия (начальные данные). Их нужно выбирать в зависимости от того, какую орбиту мы хотим получить. Начнем с самого простого: с почти круговой орбиты. Обратимся к методу, изложенному в статье [5]. Итеративным путем проделаем анализ уравнений, дающие начальные условия, чтоб убедиться, что оно достаточно хорошо их описывает.

Записываем всю систему дифференциальных уравнений

$$H_{eff}^{orb} = \sqrt{A(r) \left( 1 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + \frac{p_r^2}{B(r)} + z_3 \frac{p_r^4}{r^2} \right)} \quad (40)$$

$$H = M \sqrt{1 + 2\nu \left( \frac{H_{eff}}{\mu} - 1 \right)} \quad (41)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{M^2 \nu}{H \mu} \frac{A(r)}{2H_{eff}} \left( \frac{2p_r}{B(r)} + \frac{4z_3 p_r^3}{r^2} \right) \quad (42)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{M^2 \nu}{H \mu} \left( \frac{A(r) p_\phi}{H_{eff} r^2} \right) \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_r}{dt} = F_r - \frac{M^2 \nu}{H \mu} \frac{1}{2H_{eff}} \left( A'(r) \left( 1 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + \frac{p_r^2}{B(r)} + z_3 \frac{p_r^4}{r^2} \right) + \right. \\ \left. + A(r) \left( -2 \frac{p_\phi^2}{r^3} - B'(r) \frac{p_r^2}{B^2(r)} - 2z_3 \frac{p_r^4}{r^3} \right) \right) \end{aligned} \quad (44)$$

$$\frac{dp_\phi}{dt} = F_\phi \quad (45)$$

Сразу для полноты картины, дадим значения функций  $A(r)$ ,  $B(r)$

$$A(r) = 1 - \frac{2}{r} + \frac{2\nu}{r^3} + \frac{4a_4}{r^4} + \nu(a_5 - a_5^{log} \ln r) \frac{1}{r^5} \quad (46)$$

$$B(r) = 1 + \frac{6\nu}{r^2} + b_3 \frac{2\nu}{r^3} + \nu(b_4 - b_4^{log} \ln r) \frac{1}{r^4} \quad (47)$$

где

$$b_3 = 26 - 3\nu \quad (48)$$

$$\begin{aligned} b_4 = -\frac{533}{45} + \frac{1184}{15} \gamma - \frac{23761\pi^2}{1536} - 260\nu + \frac{123\nu}{16} \pi^2 - \\ - \frac{6496}{15} \ln 2 + \frac{2916}{5} \ln 3 \end{aligned} \quad (49)$$

$$b_4^{log} = \frac{592}{15} \quad (50)$$

$$a_4 = \nu \left( \frac{94}{3} - \frac{41}{32} \pi^2 \right) \quad (51)$$

$$a_5 = \nu \left( \frac{128}{5} \gamma - \frac{4237}{60} + \frac{2275}{512} \pi^2 + \frac{256}{5} \ln 2 \right) \quad (52)$$

$$a_5^{log} = \frac{64}{5} \nu \quad (53)$$

$$(54)$$

Первым делом рассмотрим бесспиновой и бесспиновый режим и получим связь импульсов с радиусом в некотором приближении. В отсутствии сил на круговой орбите  $\frac{dr}{dt} = 0$ . Это значит, что  $p_r = 0$ , а также  $\dot{p}_r = 0$ . Из уравнения  $\frac{\partial H}{\partial r}(p_\phi, r) = 0$  вытаскиваем  $p_\phi(r)$

$$A'(r)\left(1 + \frac{p_\phi^2}{r^2}\right) = A(r)\left(\frac{2p_\phi^2}{r^3}\right) \quad (55)$$

$$p_{\phi 1} = \sqrt{\frac{A'(r)}{\frac{2A(r)}{r^3} - \frac{A'(r)}{r^2}}} \quad (56)$$

Согласно уравнениям ЕОВ можно получить  $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi}_1 = \frac{M^2\nu}{H\mu} \left(\frac{A(r)}{H_{eff}} \frac{p_{\phi 1}}{r^2}\right) \quad (57)$$

где  $H = H_{EOB} = M\sqrt{1 + 2\nu\left(\frac{H_{eff}}{\mu} - 1\right)}$ ,  $H_{eff} = \sqrt{A(r)\left(1 + \frac{p_{\phi 1}^2}{r^2}\right)}$

Согласно [1,3] полученного результата вполне достаточно, чтоб задать силы через  $\dot{\phi}$  и  $\frac{dr}{dt}$ . Коль у нас появилась сила, то импульсы начинают изменяться, а значит  $p_r$  уже отлична от нуля и непостоянна.

$$p_{\dot{\phi} 1} = \frac{\partial p_{\phi 1}}{\partial r} \frac{dr}{dt} = F_\phi\left(\frac{dr}{dt} = 0, \dot{\phi}_1\right) \quad (58)$$

Для упрощения положим  $z_3 = 0$ . Наше  $p_r$  сидит внутри  $\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}$ .

$$p_{r 1} = \frac{F_\phi\left(\frac{dr}{dt} = 0, \dot{\phi}_1\right) H\mu H_{eff} B(r)}{\frac{\partial p_{\phi 1}}{\partial r} M^2\nu A(r)} \quad (59)$$

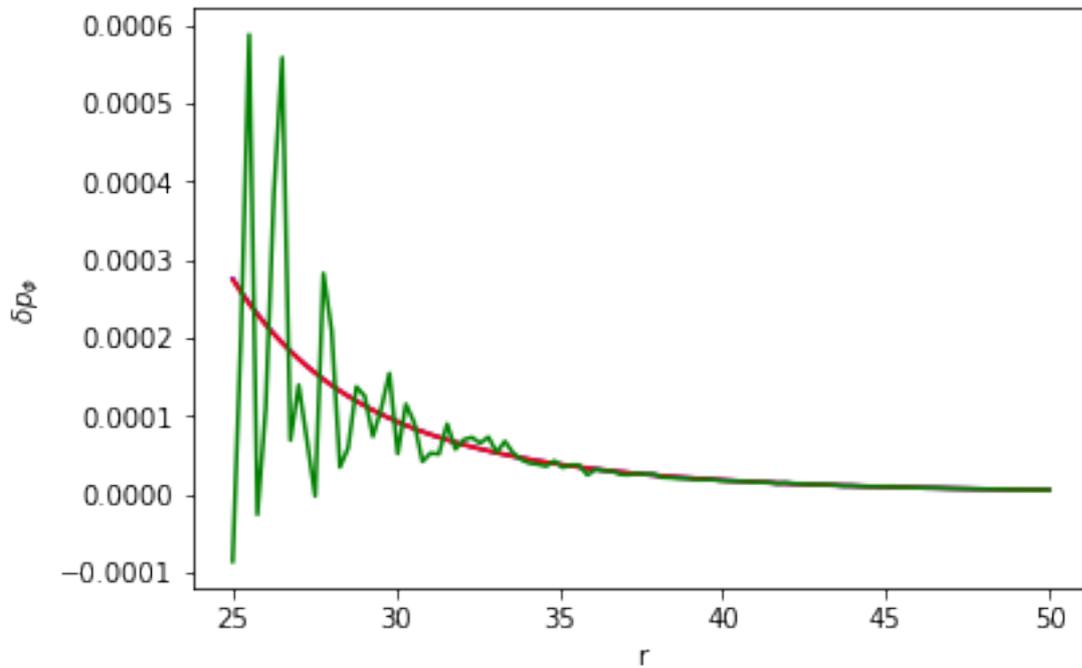
Чтоб найти следующую итерацию, используем все найденные ранее значения импульсов. Подставим их в в слагаемые, определяющие силы и из уравнений Гамильтона выразим новую поправку к импульсу.

$$p_{r 1} = \frac{\partial p_{r 1}}{\partial r} \frac{dr}{dt} = F_r\left(\frac{dr}{dt}, \dot{\phi}_1\right) - \frac{\partial H}{\partial r}(p_{r 1}, p_{\phi 2}) \quad (60)$$

Выражаем  $p_{\phi 2}$ . По аналогии с методом нахождения  $p_{r 1}$  находим  $p_{r 2}$ .

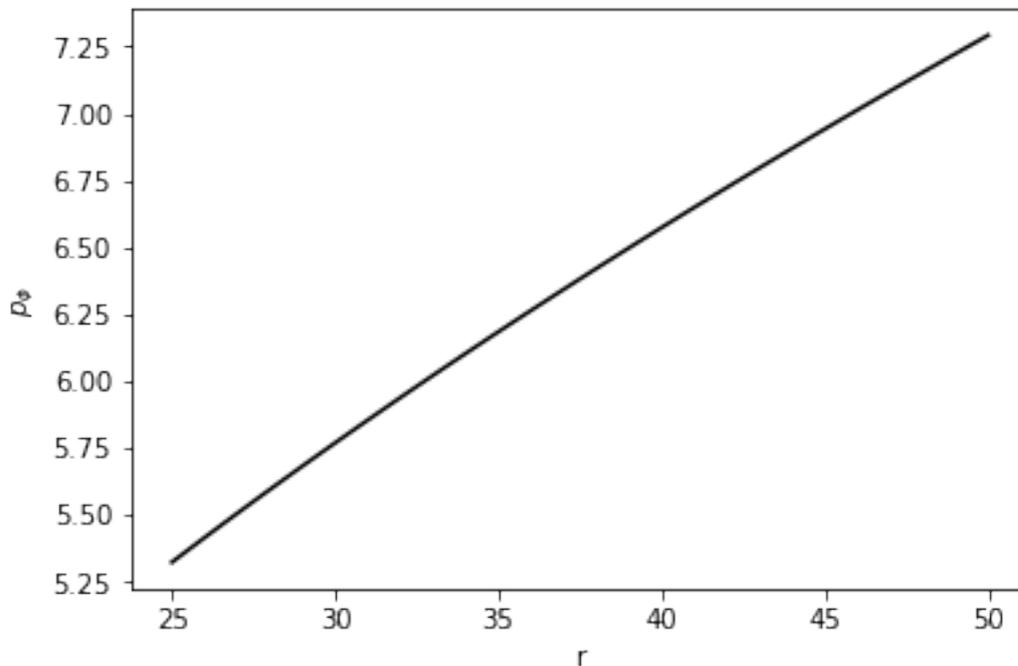
$$p_{\dot{\phi} 2} = \frac{\partial p_{\phi 2}}{\partial r} \frac{dr}{dt}(p_{r 2}) = F_\phi\left(\frac{dr}{dt}(p_{r 1}), \dot{\phi}_2\right) \quad (61)$$

Повторение итерации поможет найти более точные значения начальных условий или как минимум покажет качественную ошибку данного приближения. Прделав необходимые вычисления мы строим графики зависимости начальных условий (а именно  $p_r, p_\phi$ ) от радиуса. Небольшое отличие начальных условий в каждой итерации требует построения графика разницы  $p_r, p_\phi$  между первой и последующей итерацией.



Как можно видеть на расстояниях  $r > 25$  ошибка не превышает 0,01%.

Для пущей законченности данных рассуждений изобразим график  $p_\phi$  в первой итерации, где по осям отложены значения в некоторой определенной системе измерений.



## 5 Аналитическое решение уравнений ЕОВ

Начальные условия можно использовать для решения обыкновенных дифференциальных уравнений численным методом, но был найден изящный аналитический подход, применимый для тел медленно коллапсирующих и находящихся на круговой орбите.

В статье [2] данный метод описан подробно. Будем представлять значения  $p_\phi, p_r$  в следующем приближении.

$$p_\phi = j(1 + k_2\epsilon^2 + \dots) \quad (62)$$

$$p_r = \pi\epsilon + \pi^3\epsilon^3 + \dots \quad (63)$$

$\epsilon^0$  приближение задается в бессиловом режиме, то есть именно присутствие силы будет давать нам первое приближение, при условии, что их мы рассматриваем малыми. Из уравнения  $\frac{\partial H}{\partial r} = 0$  найдем  $j$ . Если у коллапсирующих тел и имеется спин, то в данном случае нужно рассмотреть спины, направленные в одном направлении и перпендикулярные плоскости вращения.

$$\alpha j^2 + \beta j + \Phi = 0 \quad (64)$$

$$\alpha = \frac{M^2\nu}{H\mu} \frac{1}{2H_{eff}} \left( \frac{A'(r)}{r^2} - \frac{2A(r)}{r^3} \right) \quad (65)$$

$$\beta = \frac{M^2\nu}{H\mu} \left( -\frac{\nu}{c^2 r} \left( \left( \frac{\partial G_s}{\partial r} \right)_0 (S_\theta) + \left( \frac{\partial G_s^*}{\partial r} \right)_0 (S_\theta^*) + \frac{\nu}{c^2 r^2} (G_{s0}(S_\theta) + G_{s0}^*(S_\theta^*)) \right) \right) \quad (66)$$

$$\Phi = \frac{M^2\nu}{H\mu} \left( \frac{A'(r)}{2H_{eff}} \right) \quad (67)$$

Решая квадратное уравнение, находим связь  $j(r)$ .

Теперь настало время использовать силы. Прделаем небольшое приближение  $\frac{dp_\phi}{dt} = \left( \frac{dp_\phi}{dr} \right) \left( \frac{dr}{dt} \right) \sim \frac{dj}{dr} \left( \frac{dr}{dt} \right)$  и воспользуемся уравнениями Гамильтона, произведя  $\epsilon_1$  приближение.

$$\pi_1\epsilon = \frac{F_\phi\epsilon}{\frac{dj}{dr} \frac{M^2\nu}{H\mu} \left( \frac{A(r)}{2B(r)H_{eff}} - \frac{\nu}{c^2 r} \left( \left( \frac{\partial G_s}{\partial r} \right)_{0,\pi_1 less} (S_\theta) + \left( \frac{\partial G_s^*}{\partial r} \right)_{0,\pi_1 less} (S_\theta^*) \right) \right)} 1 \quad (68)$$

где сила  $F_\phi = F_\phi \left( \frac{dr}{dt} = 0, \dot{\phi}(j(r), r) \right)$ .

Через  $\frac{\partial G_s^*}{\partial r}_{0,\pi_1 less}$  обозначим величину равную  $\lim_{\pi_1 \rightarrow 0} \frac{\partial G_s^*}{\partial r} / \pi_1$ . Применение данного метода на более высокие порядки приближения обобщается. Для этого следует рассматривать  $\epsilon$  как бесконечно малый параметр, а динамические параметры орбиты - как бесконечный ряд по  $\epsilon$ .

$$F_\phi = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1} \epsilon^{2n+1} \quad (69)$$

$$p_r = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{2n+1} \epsilon^{2n+1} \quad (70)$$

$$p_\phi = j \left( 1 + \sum_{n=0}^{\infty} k_{2n} \epsilon^{2n} \right) \quad (71)$$

При том подчеркну, что и в статье, и в данной работе во время всех этих вычислений  $F_r = 0$ .

Вычисление следующих поправок сил обобщается следующим образом. Рассмотрим, как можно определить  $\epsilon^k F_k$ . Пусть силы задаются как в статье [1], тогда:

$$F_{m+1} = F_m(j(1 + \sum_{n=1}^m k_{2n}\epsilon^{2n}), \sum_{n=1}^m \pi_{2n-1}\epsilon^{2n-1}) - F_{m-1}(j(1 + \sum_{n=1}^{m-1} k_{2n}\epsilon^{2n}), \sum_{n=1}^{m-1} \pi_{2n-1}\epsilon^{2n-1}) \quad (72)$$

Этот метод не позволит построить всю траекторию движения тел, но этого нам и не надо. Мы строим радиальную сетку  $(r_0, r)$ , по которой предполагается вычислять импульсы.  $r_0$  - начальный радиус эволюции ЕОВ. Теперь на этой сетке можно проводить интегрирование уравнений Гамильтона для получения зависимости времени и фазы от  $r$ .

$$t(r) = \int_{r_0}^r dr' \left(\frac{dr'}{dt}\right)^{-1} = \int_{r_0}^r dr' \left(\frac{\partial H}{\partial p_r}\right)^{-1} \quad (73)$$

$$\phi(r) = \int_{r_0}^r dr' \left(\frac{d\phi}{dt}\right) \left(\frac{dr'}{dt}\right)^{-1} = \int_{r_0}^r dr' \left(\frac{\partial H}{\partial p_\phi}\right) \left(\frac{\partial H}{\partial p_r}\right)^{-1} \quad (74)$$

Замечу, количество точек сетки может варьироваться в зависимости от значения  $g$ . Это существенно необходимо для увеличения точности при интегрировании. Как только мы вычислили полную динамику для каждой точки радиальной сетки, мы можем получить излучаемые волны.

## 6 Геодезические в метрике Шварцшильда на орбитах с эксцентриситетом

Поиск новых методов интегрирования уравнений ЕОВ и не только требует, первым делом, рассмотреть известную задачу движения тел в метрике Шварцшильда. Рассмотрим точечную частицу с массой  $\mu$ , вращающейся вокруг Шварцшильдовской черной дыры с массой  $M \gg \mu$ . Соотношение между импульсом и энергией пробной частицы с массой покоя  $\mu$ , движущейся в искривленном пространстве, имеет вид

$$g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + \mu^2 = 0 \quad (75)$$

В нашем случае да и общепринято записывать  $p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}$ . Тогда уравнение Гамильтона-Якоби в Шварцшильдовской геометрии принимает следующий вид

$$-\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + \mu^2 = 0 \quad (76)$$

В пределе  $\mu \rightarrow 0$  можно параметризовать траекторию частицы параметром  $\tau$ , являющимся собственным временем в этой метрике. Таким образом,  $x_p^\mu = (t_p(\tau), r_p(\tau), \theta_p(\tau), \phi_p(\tau))$  с соответствующей 4-скоростью в виде  $u^\mu = dx_p^\mu/d\tau$ .

Без потери общности рассмотрим  $\theta = \pi/2$ . Наши сопряженные импульсы сохраняются, поэтому  $p_0 = -E$ ,  $p_\phi = L$ ,  $p_\theta = 0$ . Это приводит нас к упрощению уравнения

$$-\frac{E^2}{1 - \frac{2M}{r}} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} + \mu^2 = 0 \quad (77)$$

В данном случае  $\lambda = \frac{\tau}{\mu}$ . Если все сохраняющиеся величины отнесены к единице массы, тогда

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \tau}\right)^2 = \widetilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\widetilde{L}^2}{r^2}\right) \quad (78)$$

Уравнение для других координат как функция собственного времени имеет вид

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{p^\phi}{\mu} = \frac{g^{\phi\phi}L}{\mu} = \frac{\widetilde{L}}{r^2} \quad (79)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{p^0}{\mu} = -\frac{g^{00}E}{\mu} = \frac{\widetilde{E}}{1 - \frac{2M}{r}} \quad (80)$$

Все эти действия привели нас к уравнениям геодезических, которые представим в следующем виде:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\widetilde{E}}{f(r_p)} \quad (81)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\widetilde{L}}{r^2} \quad (82)$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \widetilde{E} - R(r, L) \quad (83)$$

$$R(r, L) = f(r)\left(1 + \frac{\widetilde{L}^2}{r^2}\right) \quad (84)$$

где  $f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$

Когда  $L^2 > 12M^2$ , эффективный потенциал радиального движения имеет максимум и минимум, а значит существует некруговая орбита. Параметры орбиты  $p$  и  $e$  зададим через  $r_{min}$  и  $r_{max}$ , как это принято делать в задаче Кеплера.

$$p = \frac{2r_{min}r_{max}}{M(r_{min} + r_{max})} \quad (85)$$

$$e = \frac{r_{min} - r_{max}}{r_{min} + r_{max}} \quad (86)$$

Учитывая, что в точках поворота  $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)$  должно равняться нулю, получаем два уравнения. (Кстати говоря, подобный метод можно применить и для уравнений ЕОВ в бесспиловом и бесспиновом режиме)

$$R(r_{min}) = R(r_{max}) = \widetilde{E}^2 \quad (87)$$

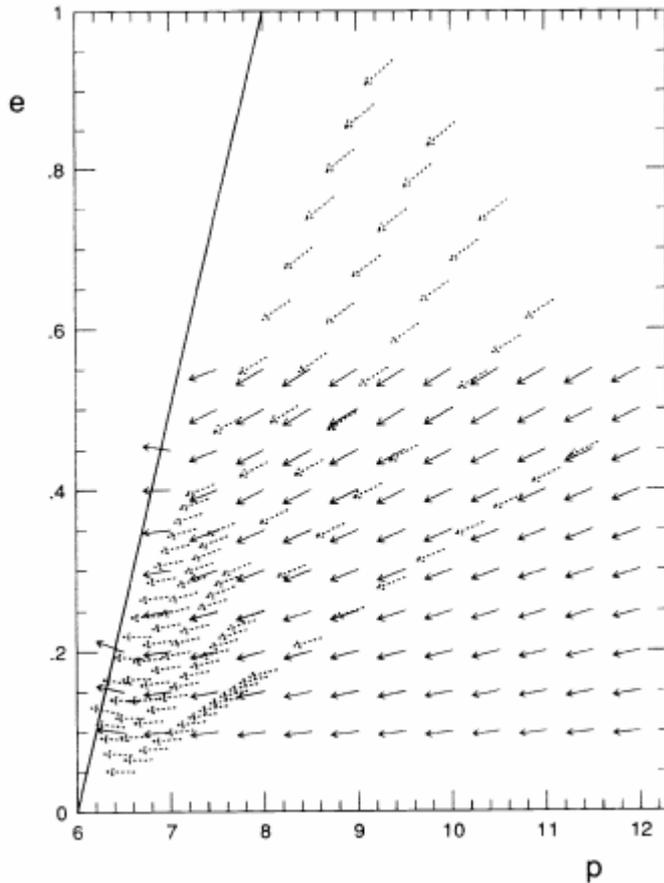
Выражаем  $\widetilde{E}$ ,  $\widetilde{L}$  через  $e$ ,  $p$  переменные

$$\widetilde{E}^2 = \frac{(p-2-2e)(p-2+2e)}{p(p-3-e^2)} \quad (88)$$

$$\widetilde{L}^2 = \frac{p^2M^2}{p-3-e^2} \quad (89)$$

Точки вдоль сепаратрисы  $p = 6 + 2e$  представляют существенно нестабильные орбиты.

Орбиты точечного тела в метрике Шварцшильда при условии существования эволюции параметров орбиты за счет радиационной силы можно представить на  $p$ - $e$  поверхности. Сплошная диагональная линия - это сепаратриса.



Как это все укладывается в концепцию темы диплома. Абсолютно непосредственно. В разделе мы искали начальные условия  $(p_r, p_\phi)$  для уравнений ЕОВ. Импульсы по существу характеризуют энергию сливающихся тел в определенной калибровке. Можно решать задачу таким путем. Однако более логично рассматривать параметры орбиты. В данном разделе мы ввели  $p$  и  $e$  как это делается в кеплеровой небесной механике. Этими параметрами мы попытались описать нашу орбиту. Как следствие их эволюция покажет нам процесс слияние тел. Поэтому можно попробовать получить дифференциальные уравнения на параметры  $e$  и  $p$ , чтоб впоследствии для начальных условий использовать именно характеристики орбиты.

## 7 Параметризация орбиты и уравнения ЕОВ

Ныне применим технику, примененную в предыдущем разделе, к уравнениям ЕОВ. Запараметризуем орбиту тел, движущихся в одной плоскости следующим соотношением:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \xi} \quad (90)$$

Как упоминалось ранее эта параметризация на бесконечности в точности задает движение тел в поле Ньютоновской гравитации.

Данной параметризацией мы добиваемся вписывания в каждый момент времени эллипса с определенными  $e$ ,  $p$ . Воспользуемся уравнениями ЕОВ в бессиловом и бесспиновом режиме и выразим  $p_r$  через  $E$ ,  $p_\phi$ ,  $r$ .

$$H_{EOB} = E \quad (91)$$

$$\left( \left( \frac{H^2}{M^2} - 1 + 2\nu \right) \frac{\mu}{2\nu} \right) = H_{eff} \quad (92)$$

$$p_r^2 + \frac{r^2}{z_3 B(r)} p_r - \frac{H_{eff} r^2}{A(r) z_3} + \frac{r^2}{z_3} + \frac{1}{z_3} p_\phi^2 = 0 \quad (93)$$

$$p_r^2 = \frac{b}{2} \left( -1 + \sqrt{1 - \frac{4c}{b^2}} \right) \quad (94)$$

$$b = \frac{r^2}{z_3 B(r)} \quad (95)$$

$$c = -\frac{H_{eff} r^2}{A(r) z_3} + \frac{r^2}{z_3} + \frac{1}{z_3} p_\phi^2 \quad (96)$$

Рассмотрим точки, в которых  $p_r = 0$ , назвав их точками поворота радиального движения. Выписанное условие даст возможность описать движение массивных тел в поле друг друга в случае отсутствия радиационных сил. Точки поворота задаются в следующем виде:

$$r_1 = \frac{pM}{1 - e} \quad (97)$$

$$r_1 = \frac{pM}{1 + e} \quad (98)$$

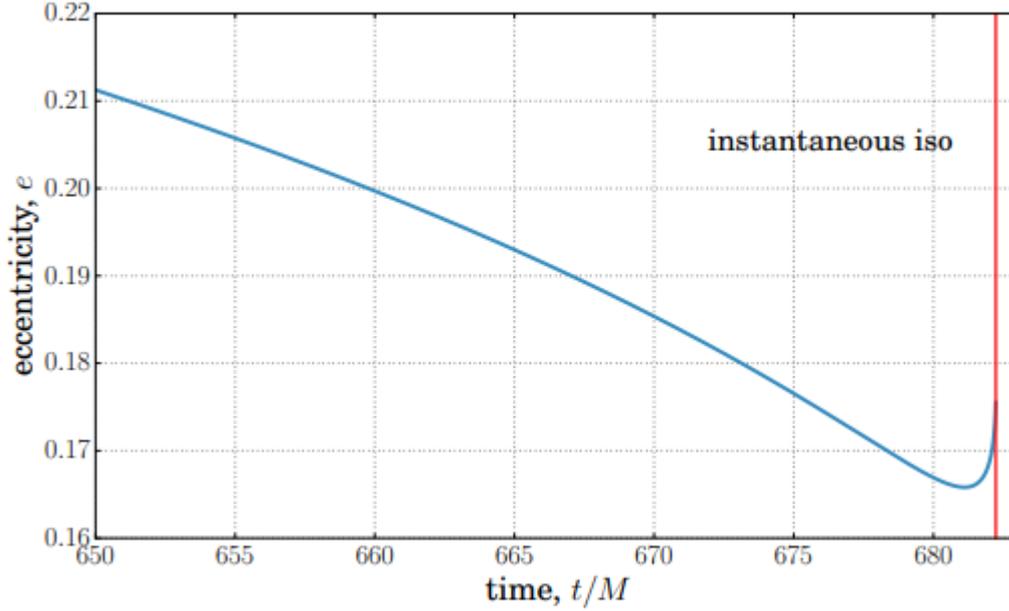
Из явного вида  $H_{eff}$  в задаче без спинов благодаря  $r_1$  и  $r_2$  получаем два уравнения, из которых вытаскиваем связь  $p_\phi$  и  $E$  с параметрами орбиты.

$$p_\phi^2 = \frac{p^2(A(r_1) - A(r_2))}{(1 - e)^2 A(r_1) - (1 + e)^2 A(r_2)} \quad (99)$$

$$\frac{E^2}{M^2} = 1 - 2\nu + \frac{4\nu \sqrt{eA(r_1)A(r_2)}}{\sqrt{(1 + e)^2 A(r_1) - (1 - e)^2 A(r_2)}} \quad (100)$$

Согласно статье [1] при стремлении  $\nu \rightarrow 0$  формулы для  $p_\phi$ ,  $E$  будут давать значения на геодезической в метрике Шварцшильда.

Отмечу, что введенное понятие, эксцентриситет, отличается от аналогичного введенного в небесной механике. Оно характеризует орбиту, но ее характер понять непросто:  $p \rightarrow \infty$  - ньютоновская механика. При  $e \rightarrow 0$  мы должны ожидать, что орбита становится все более круговой, но давайте взглянем на график эволюции  $e$ .



Предыдущий график получен при решении уравнений ЕОВ, поэтому если обратиться на  $r$ -е поверхность предыдущего раздела, то увеличение эксцентриситета в процессе эволюции также наблюдается.

Так можно убедиться, что при больших временах, когда при всех численных расчетах орбита стремится стать круговой, мы видим увеличение эксцентриситета. Поэтому, говоря об этом параметре в теории относительности, нужно быть крайне аккуратным.

## 8 Эволюция параметров орбиты

Подготовительный этап пройден, теперь настало время перейти к описанию эволюции параметров орбиты. По причине того, что мы остаемся работать в Гамильтоновой механике, чисто математически можно проделать каноническое преобразование, которое предоставит возможность описывать эту динамику через параметры орбиты. Поэтому раз динамика импульсов задавалась через дифференциальные уравнения первого порядка, то новые переменные также останутся первого порядка. Продифференцируем уравнение (90) и выделим производную  $\dot{\xi}$ .

$$\dot{\xi} = \frac{(1 + e \cos \xi)^2}{ep \sin \xi} \dot{r} + \frac{\cot \xi}{e} \dot{e} - \frac{1 + e \cos \xi}{ep \sin \xi} \dot{p} \quad (101)$$

Нам известно из уравнений ЕОВ, что

$$\dot{E} = F_E(\dot{r}, \dot{\phi}, r) \quad (102)$$

$$\dot{p}_\phi = F_\phi(\dot{r}, \dot{\phi}, r) \quad (103)$$

Чтоб не находить требуемое каноническое преобразование, воспользуемся знанием зависимости энергии и импульса от параметров орбиты в бессильном режиме. Применяя формулы (99-100) и (102-103), запишем уравнения на эволюцию параметров орбиты.

$$\dot{e} = \frac{\partial e}{\partial E} \dot{E} + \frac{\partial e}{\partial p_\phi} \dot{p}_\phi = \frac{\partial e}{\partial E} F_E(\dot{r}, \dot{\phi}, r) + \frac{\partial e}{\partial p_\phi} F_\phi(\dot{r}, \dot{\phi}, r) \quad (104)$$

$$\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial E} \dot{E} + \frac{\partial p}{\partial p_\phi} \dot{p}_\phi = \frac{\partial p}{\partial E} F_E(\dot{r}, \dot{\phi}, r) + \frac{\partial p}{\partial p_\phi} F_\phi(\dot{r}, \dot{\phi}, r) \quad (105)$$

В последующем нам понадобится зависимость  $\dot{r}$ ,  $\dot{\phi}$  от  $e$ ,  $p$ ,  $\xi$ . Опустим выкладки, которые проделаны в статье [1]. В нулевом и первом порядке по  $\frac{1}{p}$  формулы выглядят следующим образом

$$\dot{r} = \frac{eMp \sin \xi}{(1 + e \cos \xi)^2} \mathcal{P}(e, p, \xi) \quad (106)$$

$$\mathcal{P}(e, p, \xi) = \frac{(1 + e \cos \xi)^2}{Mp^{3/2}} \left[ 1 - \frac{3(1 + e \cos \xi)}{p} + \frac{\nu(1 - e^2)}{2p} \right] \quad (107)$$

$$\dot{\phi} = \frac{(1 + e \cos \xi)^2}{Mp^{3/2}} \left[ 1 - \frac{2e \cos \xi}{p} + \frac{\nu(1 - e^2)}{2p} \right] \quad (108)$$

## 9 Расчет потоков энергии и момента

Все это время мы говорили, что силы можно выразить через скорости движения тел на орбите, но пока ни разу не оговорились о способе их подсчета и конечного вида. Для дальнейших вычислений это понадобится. Методы подсчета сил, стоящих в правой части уравнений ЕОВ, описаны в статье [16].

Согласно Торну выражение для потока энергии в дальней зоне  $\frac{dE}{dt}^{GW}$  в терминах симметричных бесследовых мультипольных радиационных моментов выглядит как:

$$F = \frac{G}{c^5} \left( \frac{1}{5} U_{ij}^1 U_{ij}^1 + \frac{1}{c^2} \left[ \frac{1}{189} U_{ijk}^1 U_{ijk}^1 + \frac{16}{45} V_{ijk}^1 V_{ijk}^1 \right] \right) \quad (109)$$

Радиационные моменты должны быть посчитаны до соответственных пост-Ньютоновских поправок.  $U_{ij}$  - до 1-PN,  $U_{ijk}$ ,  $V_{ijk}$  - с точностью до обычной Ньютоновской теории. Индексы сверху над моментами обозначают n-тую производную по времени.

$$U_{ij} = I_{ij}^2(U) + \frac{2GM}{c^3} \int_0^{+\infty} d\tau \left[ \ln \frac{c\tau}{2r_0} + \frac{11}{2} \right] J_{ij}^4(U - \tau) \quad (110)$$

$$V_{ij} = J_{ij}^2(U) + \frac{2GM}{c^3} \int_0^{+\infty} d\tau \left[ \ln \frac{c\tau}{2r_0} + \frac{11}{2} \right] I_{ij}^4(U - \tau) \quad (111)$$

Постоянная длины  $r_0$  масштабирует логарифм и может выбираться в соответствии с тем, как вычисляются хвосты у сил. При регуляризации собственного поля точечных частиц в стандартной гармонической системе координат выбирают значение  $r_0$  как  $(m_1 + m_2) \ln r_0 = m_1 \ln r_1 + m_2 \ln r_2$ , где  $r_1$ ,  $r_2$  соответствуют положениям объектов в пространстве относительно некоторой точки, названной центром системы. Переменная  $U$  обозначает запаздывающее время и определяется как  $U = T - R/c$ .

Опуская необходимые дополнительные действия, через которые можно определить радиационные моменты, записываем силы в 1PN как:

$$F_E = \frac{32 \mu^2 M^2}{5 r^4} \left[ v^2 - \frac{11}{12} \dot{r}^2 + \left( \frac{785}{336} - \frac{71}{28} \nu \right) v^4 + \left( -\frac{1487}{168} + \frac{58}{7} \nu \right) v^2 \dot{r}^2 + \right. \\ \left. \left( -\frac{170}{21} + \frac{10}{21} \nu \right) \frac{M}{r} v^2 + \left( \frac{687}{112} - \frac{155}{28} \nu \right) \dot{r}^4 + \left( \frac{367}{42} - \frac{5}{14} \nu \right) \frac{M}{r} \dot{r}^2 + \left( \frac{1}{21} - \frac{4}{21} \nu \right) \frac{M^2}{r^2} \right] \quad (112)$$

$$F_\phi = \frac{\mu^2 M \dot{\phi}}{r} \left[ \frac{16}{5} v^2 - \frac{24}{5} \dot{r}^2 + \frac{16}{5} \frac{M}{r} + \left( \frac{614}{105} - \frac{1096}{105} \nu \right) v^4 + \left( -\frac{296}{35} + \frac{1108}{35} \nu \right) v^2 \dot{r}^2 + \right. \\ \left. \left( -\frac{464}{105} - \frac{152}{21} \nu \right) \frac{M}{r} v^2 + \left( \frac{38}{7} - \frac{144}{7} \nu \right) \dot{r}^4 + \left( \frac{496}{35} + \frac{788}{105} \nu \right) \frac{M}{r} \dot{r}^2 + \left( -\frac{596}{21} + \frac{8}{105} \nu \right) \frac{M^2}{r^2} \right] \quad (113)$$

Эти силы вычислены в ADM координатах, поэтому нам нужно сделать переход в EOB координаты. В статье [1] довольно подробно проделан переход от одних координат к другим. Воспользуемся известным результатом

$$F^{EOB} = F^{ADM} + \delta F^{ADM \rightarrow EOB} \quad (114)$$

$$F_E^{ADM \rightarrow EOB} = \frac{32 m u^2 M^2}{15 r^5} \left[ M r^2 (1 - nu) + 3 M r^2 \dot{\phi}^2 (2 - nu) - \frac{3}{4} \nu r r^4 - \right. \\ \left. \frac{57}{4} \nu r^3 r^2 \dot{\phi}^2 + 3 r^5 \nu \dot{\phi}^4 \right] \quad (115)$$

$$F_\phi^{ADM \rightarrow EOB} = \frac{4 m u^2 M}{15 r^3} \left[ 8 M - M r r^2 (2 + 3nu) - \nu r^2 r^4 + 14 r^6 \nu \dot{\phi}^4 - \right. \\ \left. (4 M + 14 M \nu + 17 \nu r r^2) r^3 \dot{\phi}^2 \right] \quad (116)$$

## 10 Усреднение сил

При движении массивных тел в Шварцшильдовской метрике наблюдаются две частоты обращения тела. Для понимания этого процесса можно вспомнить прецессию периастра Меркурия в Солнечной системе. Помимо частоты обращения планеты вокруг Солнца эта прецессия будет давать вторую частоту. В нашей задаче соответствующую частоту будем определять следующим образом.

$$\omega_r = \frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{\mathcal{P}}} \quad (117)$$

Значение функции  $\mathcal{P}$  задается формулой (107). Следовательно у нас имеется некоторый скрытый параметр  $\psi_r$ , ответственный за фазу орбиты. Ее определим, как

$$\frac{d\psi_r}{dt} = \omega_r \quad (118)$$

Коль мы говорим, что надо каждую функцию, зависящую от  $\xi$ , рассматривать зависящей от скрытой переменной  $\psi_r$ , тогда любая функция может быть разложена в ряд Фурье по  $\psi_r$

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k e^{ik\psi_r} \quad (119)$$

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi_r f e^{-ik\psi_r} \quad (120)$$

Установим связь между двумя величинами  $\psi_r$  и  $\xi$ , чтобы было возможным находить коэффициенты ряда Фурье

$$d\psi_r = \frac{\omega_r}{\mathcal{P}} d\xi \quad (121)$$

Для пущей законченности всех этих выкладок запишем фазовую скорость движения тела

$$\omega_\phi = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{\mathcal{P}} \dot{\phi}}{\int_0^{2\pi} d\xi / \mathcal{P}} = \frac{\omega_r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{\mathcal{P}} \dot{\phi} \quad (122)$$

Данные выкладки нужны были, чтоб в дальнейшем мы могли работать с более фундаментальной переменной  $\psi_r$ .

Наши силы являются периодическим, а значит эволюция параметров орбиты за период меняется. Этот факт заметно усложняет систему дифференциальных уравнений, так как нам приходится включать  $\xi$ , но известно, что фаза быстро осциллирует, а силы можно считать малыми. Эти факты дают повод применить метод усреднения Боголюбова-Крылова, чтоб успешно сократить осциллирующие множители разложения Фурье для сил.

Рассмотрим в общем случае дифференциальное уравнение

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \epsilon \vec{Y}(\xi, \vec{X}) \quad (123)$$

где  $\vec{X}$  - это некоторый меняющийся параметр,  $\epsilon \vec{Y}$  - малая сила. Представим  $\vec{X}$  как суперпозицию медленно меняющегося члена  $\vec{\kappa}$  и суммы быстро осциллирующих членов, которые малы. В первом порядке  $X = \kappa$ . Разложим силу в ряд Фурье

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \epsilon \vec{Y}(\xi, \vec{X}) = \epsilon \sum_m \vec{Y}_m(\vec{\kappa}) e^{im\psi_r} \quad (124)$$

Считаем, что колебательные члены вызывают малые вибрации  $X$  около  $\kappa$  и не оказывают влияние на систематическое изменение  $X$ . Таким образом приходим к формуле.

$$\frac{d\vec{\kappa}}{dt} = \epsilon \langle \vec{Y} \rangle_{\psi_r} \quad (125)$$

$$\langle \vec{Y} \rangle_{\psi_r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{Y} d\psi_r \quad (126)$$

Сила стоящая справа, и будет усредненной силой. Метод очень хорош и лаконичен, но не учитывает слабые осцилляции орбиты, коль силы были усреднены за период. Поэтому, если мы желаем учитывать слабое дребужание орбиты для некруговой задачи, то нужно использовать следующие порядки усреднения. Что ж, учтем вибрационные члены. Второй порядок величины  $X$  выглядит как:

$$\vec{X} = \vec{\kappa} + \epsilon \int_0^{2\pi} \sum_{m \neq 0} \vec{Y}(\vec{\kappa}) e^{im\psi_r} \frac{1}{\frac{\partial \psi_r}{\partial t}} d\psi_r \quad (127)$$

$$\vec{X} = \vec{\kappa} + \epsilon \frac{1}{\omega_r} \widetilde{\vec{Y}}(z, \vec{\kappa}) \quad (128)$$

где  $\widetilde{\vec{Y}}(z, \vec{\kappa})$  является интегрирующим оператором и определяется в нашем случае как  $\widetilde{\vec{Y}}(z, \vec{\kappa}) = \omega_r \int_0^z \left( \frac{1}{\mathcal{P}} \vec{Y}(\xi, \vec{\kappa}) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mathcal{P}} \vec{Y}(\xi', \vec{\kappa}) d\xi' \right) d\xi$ . Подставляя второй порядок  $X$  в уравнение и проделывая разложение в ряд Телора, получаем

$$\frac{d\vec{\kappa}}{dt} = \epsilon \frac{\omega_r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mathcal{P}} \vec{Y}(z, \vec{\kappa} + \epsilon \frac{1}{\omega_r} \widetilde{\vec{Y}}(z, \vec{\kappa})) dz = \epsilon \frac{\omega_r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{\mathcal{P}} \vec{Y}(z, \vec{\kappa}) + \epsilon \frac{1}{\omega_r} \left( \widetilde{\vec{Y}}(z, \vec{\kappa}) \frac{\partial}{\partial \vec{\kappa}} \right) \vec{Y}(z, \vec{\kappa}) \right) \frac{1}{\mathcal{P}} dz \quad (129)$$

В нашей задаче порядком малости может служить  $\frac{1}{p^n}$ , поэтому чтоб говорить о поправке порядка  $\epsilon^2$ , определяемой формулой (129), необходимо по порядку  $\frac{1}{p}$  при простом усреднении добраться до минимальной степени  $\frac{1}{p}$  члена  $Y^2$ , а значит необходимо рассматривать слагаемые, дополняющие силы до 2PN, 2.5PN, 3PN как минимум. Но предположим, что мы это сделали, и теперь мы хотим учесть действие вибрационных членов. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dot{e} = f(e, p, \xi) \\ \dot{p} = g(e, p, \xi) \end{cases} \quad (130)$$

Значение сил  $f$  и  $g$  нам известны в соответствии с формулами (104-105). Попробуем найти второй порядок по  $\epsilon$  по изложенному ранее методу. Будем учитывать силы  $F_E$ ,  $F_\phi$  лишь в 1PN и более того  $\dot{r}$ ,  $\dot{\phi}$  берем лишь максимально первого порядка по  $\frac{1}{p}$ . Как оказывается, члены учитывающие вибрационные слагаемые

$$\begin{aligned} \epsilon^2 : & \left\langle \left( \int_0^z \frac{1}{\mathcal{P}} f(e, p, \xi) d\xi - \frac{z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mathcal{P}} f(e, p, \xi) d\xi \right) \left( \frac{1}{\mathcal{P}} f(e, p, z) \right) \right\rangle_e \Big|_z + \\ & \left\langle \left( \int_0^z \frac{1}{\mathcal{P}} g(e, p, \xi) d\xi - \frac{z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mathcal{P}} g(e, p, \xi) d\xi \right) \left( \frac{1}{\mathcal{P}} f(e, p, z) \right) \right\rangle_p \Big|_z = 0 \end{aligned} \quad (131)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^2 : & \left\langle \left( \int_0^z \frac{1}{\mathcal{P}} f(e, p, \xi) d\xi - \frac{z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mathcal{P}} f(e, p, \xi) d\xi \right) \left( \frac{1}{\mathcal{P}} g(e, p, z) \right) \right\rangle_e \Big|_z + \\ & \left\langle \left( \int_0^z \frac{1}{\mathcal{P}} g(e, p, \xi) d\xi - \frac{z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mathcal{P}} g(e, p, \xi) d\xi \right) \left( \frac{1}{\mathcal{P}} g(e, p, z) \right) \right\rangle_p \Big|_z = 0 \end{aligned} \quad (132)$$

равны нулю. Как мы видим, второй порядок в низших степенях  $\frac{1}{p}$  не дает какого-нибудь определенного значения. С одной стороны это хорошо - не нагромождаются формулы, с другой стороны члены, дающие малые осцилляции  $e$  и  $p$ , не выявлены.

Данный метод не единственный, который можно применить для нахождения Post-Adiabatic поправок, однако мы на время оставим это дело, и попробуем продемонстрировать практическую необходимость решения дифференциальных уравнений на эволюцию параметров орбиты.

## 11 Быстрое интегрирование орбит с эксцентриситетом

Помимо использования уравнений на параметры орбиты для определения их эволюции, можно воспользоваться ими для более точного нахождения импульсов системы. Так как мы знаем, скажем,  $e(p)$ , вытекающее из системы (130) после усреднения правых выражений, тогда можно использовать формулы (99, 100), однако они не учитывают влияние действия сил. То есть в нулевом приближении такой подход справедлив.

Первым делом запишем уравнения ЕОВ в компактном виде, чтобы конечные формулы не выглядели громоздкими. На первых порах положим  $F_r = 0$  как в статье [2]

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \lambda(r)p_r + \delta(r)p_r^3 \\ \frac{dp_r}{dt} = \alpha(r) + \beta(r)p_\phi^2 + \gamma(r)p_r^2 \\ \dot{\phi} = \Psi(r)p_\phi \\ \frac{dp_\phi}{dt} = F_\phi \end{cases} \quad (133)$$

$$F_\phi = F_{\phi 1}\epsilon + F_{\phi 2}\epsilon^2 + \dots \quad (134)$$

Используя факт малости силы, можно найти способ, как упростить данные формулы и попытаться использовать метод интегрирования, примененный и описанный для круговых орбит.

Запишем  $\frac{dp_r}{dt}$  в частных производных, учитывая, что мы хотим систему описать через  $e, p, \theta$

$$r = \frac{pM}{1 + e \cos \xi} \quad (135)$$

$$\frac{dp_r}{dt} = \frac{\partial p_r}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial p_r}{\partial e} \dot{e} + \frac{\partial p_r}{\partial p} \dot{p} \quad (136)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial r}{\partial e} \dot{e} + \frac{\partial r}{\partial p} \dot{p} \quad (137)$$

Первым делом учтем, что за период заметно по величине меняется лишь производная любой функции от  $\xi$ , а параметры орбиты меняются незначительно. Можно рассуждать и другим способом: согласно формулам (102, 103) можно утверждать, что производные  $e$  и  $p$  имеют как минимум первый порядок  $\epsilon$ .

$$\dot{e} \sim \epsilon \quad (138)$$

$$\dot{p} \sim \epsilon \quad (139)$$

Прделаем  $\epsilon$  разложение, с физической точки зрения производную по  $\xi$  оставляем.

$$\epsilon^0 : \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial \xi} \dot{\xi} = \lambda(e, p, \xi)p_r + \delta(e, p, \xi)p_r^3 \\ \frac{\partial p_r}{\partial \xi} \dot{\xi} = \alpha(e, p, \xi) + \beta(e, p, \xi)p_\phi^2 + \gamma(e, p, \xi)p_r^2 \\ \frac{\partial p_\phi}{\partial \xi} \dot{\xi} = 0 \end{cases} \quad (140)$$

Исключим из второго уравнения системы  $\dot{\xi}$ , используя первое уравнение. А в третьем - сократим на  $\dot{\xi}$  так как нулем оно не может быть везде. В общем, получаем

$$\epsilon^0 : \begin{cases} \frac{\partial p_r}{\partial \xi} \frac{\lambda p_r + \delta p_r^3}{\frac{\partial r}{\partial \xi}} = \alpha + \beta p_\phi^2 + \gamma p_r^2 \\ \frac{\partial p_\phi}{\partial \xi} = 0 \end{cases} \quad (141)$$

Прделаем  $\epsilon$  разложение  $p_r$  и  $p_\phi$  и используем их в системе (141).

$$p_r = \sigma_0 + \sigma_1 \epsilon^1 + \sigma_2 \epsilon^2 \quad (142)$$

$$p_\phi = j_0 + j_1 \epsilon^1 + j_2 \epsilon^2 \quad (143)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \xi} \frac{\lambda \sigma_0 + \delta \sigma_0^3}{\frac{\partial r}{\partial \xi}} = \alpha + \beta j_0^2 + \gamma \sigma_0^2 \\ \frac{\partial j_0}{\partial \xi} = 0 \end{cases} \quad (144)$$

Чтобы не городить трехэтажные формулы, сделаем небольшое переобозначение, не влияющее на ход мысли.

$$m(e, p, \xi) = \frac{\lambda}{2 \frac{\partial r}{\partial \xi}} \quad (145)$$

$$n(e, p, \xi) = \frac{\delta}{4 \frac{\partial r}{\partial \xi}} \quad (146)$$

В конечном итоге мы получаем уравнения на  $\sigma_0$  и  $j_0$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_0^2}{\partial \xi} m(e, p, \xi) + \frac{\partial \sigma_0^4}{\partial \xi} n(e, p, \xi) - \gamma \sigma_0^2 - \alpha = \beta j_0^2 \\ \frac{\partial j_0}{\partial \xi} = 0 \end{cases} \quad (147)$$

Из второго уравнения понятно, что  $j_0$  не зависит от  $\xi$ , поэтому мы имеем полное право подставить вместо этой переменной формулу (99), так как данное дифференциальное уравнение задается уравнениями ЕОВ в бессиловом режиме, чье решение ранее было найдено. Поэтому в последующем мы получим лишь уравнения на поправку.

Ключевое упрощение всех последующих вычислений связано с использованием усредненных за период обращения параметров орбиты. В нашем случае неявно это будет выражаться в их независимости от  $\xi$ . В таком случае будем рассматривать лишь взаимную зависимость  $e$  и  $p$ .

$$e \neq e(\xi) \quad (148)$$

$$p \neq p(\xi) \quad (149)$$

$$e = e(p) \quad (150)$$

Получаем главное дифференциальное уравнение на  $\sigma_0$ ,

$$\frac{\partial \sigma_0^2}{\partial \xi} \frac{m}{\beta} + \frac{\partial \sigma_0^4}{\partial \xi} \frac{n}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} \sigma_0^2 - \frac{\alpha}{\beta} = j_0^2 \quad (151)$$

решение которого на деле известно, поэтому в общем нам это уравнение и решать не придется, известные ответы будут использоваться в последующем.

Уравнения первого порядка малости по  $\epsilon$  будут выглядеть в следующем виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \xi} \dot{\xi}_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} \dot{\xi}_0 + \frac{\partial \sigma_0}{\partial e} \dot{e}_1 + \frac{\partial \sigma_0}{\partial p} \dot{p}_1 = 2\beta j_0 j_1 + 2\gamma \sigma_0 \sigma_1 \\ \frac{\partial j_0}{\partial \xi} \dot{\xi}_1 + \frac{\partial j_1}{\partial \xi} \dot{\xi}_0 + \frac{\partial j_0}{\partial e} \dot{e}_1 + \frac{\partial j_0}{\partial p} \dot{p}_1 = \epsilon F_\phi \end{cases} \quad (152)$$

где  $\epsilon^1 F_\phi = \epsilon^1 F_\phi(\sigma_0, j_0, e, p, \xi)$

Из системы уравнений (152) исключим  $\xi_1$ , которое имеет  $\epsilon^1$  порядок малости, согласно уравнению (153)

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} \dot{\xi}_1 + \frac{\partial r}{\partial e} \dot{e}_1 + \frac{\partial r}{\partial p} \dot{p}_1 = \lambda \sigma_1 \quad (153)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} \frac{\lambda \sigma_0 + \delta \sigma_0^3}{\frac{\partial r}{\partial \xi}} + \frac{\partial \sigma_0}{\partial \xi} \left( \frac{\lambda \sigma_1 - \frac{\partial r}{\partial e} e_1 - \frac{\partial r}{\partial p} p_1}{\frac{\partial r}{\partial \xi}} \right) + \frac{\partial \sigma_0}{\partial e} \dot{e}_1 + \frac{\partial \sigma_0}{\partial p} \dot{p}_1 = 2\beta j_0 j_1 + 2\gamma \sigma_0 \sigma_1 \\ \frac{\partial j_0}{\partial \xi} \left( \frac{\lambda \sigma_1 - \frac{\partial r}{\partial e} e_1 - \frac{\partial r}{\partial p} p_1}{\frac{\partial r}{\partial \xi}} \right) + \frac{\partial j_1}{\partial \xi} \frac{\lambda \sigma_0 + \delta \sigma_0^3}{\frac{\partial r}{\partial \xi}} + \frac{\partial j_0}{\partial e} \dot{e}_1 + \frac{\partial j_0}{\partial p} \dot{p}_1 = \epsilon F_\phi \end{cases} \quad (154)$$

Перенесем неизвестные члены в правую сторону, все остальное в левую.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} \frac{\lambda \sigma_0 + \delta \sigma_0^3}{\frac{\partial r}{\partial \xi}} + \frac{\partial \sigma_0}{\partial \xi} \left( \frac{\lambda \sigma_1}{\frac{\partial r}{\partial \xi}} \right) - 2\beta j_0 j_1 - 2\gamma \sigma_0 \sigma_1 = \frac{\partial \sigma_0}{\partial \xi} \left( \frac{\frac{\partial r}{\partial e} e_1 + \frac{\partial r}{\partial p} p_1}{\frac{\partial r}{\partial \xi}} \right) - \frac{\partial \sigma_0}{\partial e} \dot{e}_1 - \frac{\partial \sigma_0}{\partial p} \dot{p}_1 \\ \frac{\partial j_0}{\partial \xi} \left( \frac{\lambda \sigma_1}{\frac{\partial r}{\partial \xi}} \right) + \frac{\partial j_1}{\partial \xi} \frac{\lambda \sigma_0 + \delta \sigma_0^3}{\frac{\partial r}{\partial \xi}} = \epsilon F_\phi + \frac{\partial j_0}{\partial \xi} \left( \frac{\frac{\partial r}{\partial e} e_1 + \frac{\partial r}{\partial p} p_1}{\frac{\partial r}{\partial \xi}} \right) - \frac{\partial j_0}{\partial e} \dot{e}_1 - \frac{\partial j_0}{\partial p} \dot{p}_1 \end{cases} \quad (155)$$

Данную процедуру можно проделать необходимое число раз для получения требуемой точности вычислений. Для наглядности данные уравнения можно записать в следующем виде

$$\begin{cases} \begin{cases} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \xi} + G_0(e, p, \xi, \sigma_0, j_0) = 0 \\ \frac{\partial j_0}{\partial \xi} + F_0(e, p, \xi, \sigma_0, j_0) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} + G_1(e, p, \xi, \sigma_0, j_0, \sigma_1, j_1) = 0 \\ \frac{\partial j_1}{\partial \xi} + F_1(e, p, \xi, \sigma_0, j_0, \sigma_1, j_1) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\partial \sigma_2}{\partial \xi} + G_2(e, p, \xi, \sigma_0, j_0, \sigma_1, j_1, \sigma_2, j_2) = 0 \\ \frac{\partial j_2}{\partial \xi} + F_2(e, p, \xi, \sigma_0, j_0, \sigma_1, j_1, \sigma_2, j_2) = 0 \end{cases} \\ \dots \end{cases} \quad (156)$$

где определение сил следующего порядка выглядит как  $\epsilon^n F_\phi = \epsilon^n (F_\phi(\sigma_{n-1}, j_{n-1}, e, p, \xi) - F_\phi(\sigma_{n-2}, j_{n-2}, e, p, \xi))$

Эти формулы должны отражать метод быстрого интегрирования для некруговых орбит (обобщение метода раздела 5), однако не решен вопрос с аналитическим решением этих уравнений. Как один из возможных способов заключается в разложении  $m(e, p, \xi)$ ,  $\lambda(e, p, \xi)$  и т.д. в ряд Тейлора по  $\xi$ . Функции  $\sigma_1$ ,  $j_1$  представим в виде ряда:

$$\sigma_1 = a_{10} + a_{11}\xi + a_{12}\xi^2 + \dots \quad (157)$$

$$j_1 = b_{10} + b_{11}\xi + b_{12}\xi^2 + \dots \quad (158)$$

$$(159)$$

Комбинируя члены по степеням  $\theta$ , находим, чему равны  $a_{ij}$ , но, чтоб внести определенность, скажем, что не стоит рассматривать все коэффициенты. Нам понадобятся лишь те, которые максимально приближают импульсы к точному значению на участке  $[0, 2\pi]$ . То есть:

$$p_r = \begin{cases} 0, \theta \notin [0, 2\pi] \\ \sigma_0 + \sigma_1 \epsilon^1 + \dots, \xi \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Этот метод напоминает метод поиска коэффициентов разложения функции Бесселя при решении уравнения Бесселя.

Обмолвимся слегка о начальных условиях. Начальный импульс должен относиться к точке  $\xi = 0$ . Пускай  $\sigma_1$ ,  $j_1$  и т.д. не знают, как силы в предыдущий момент времени и в нуле на них действовали, то есть корреляция этих величин с силами равна нулю. Это пример

причинно-следственной связи, согласно которой  $a_{10}$ ,  $b_{10}$  и т.д. равны нулю. Такой подход избавляет нас от проблемы неопределенности выбора коэффициентов  $a_{10}$  и  $b_{10}$ , которая присутствует при поиске коэффициентов решения уравнения Бесселя.

Может показаться, что, перепараметризуя импульсы углом  $\xi$ , мы напрасно записываем  $\dot{\xi} = \dot{\xi}_0 + \epsilon^1 \dot{\xi}_1 + \epsilon^2 \dot{\xi}_2 + \dots$ . В данном случае нужно конкретизировать, что на параметризацию будет оказывать явно влияние сил, но можно этого не делать и настоять, что вся неявная связь с силами будет сидеть в эволюции  $e$  и  $p$ . Тогда формулы упростятся ( $\xi_k=0$ , если  $k \neq 0$ ). Воспользуемся формулой (153) и первым уравнением системы (155). Как можно видеть  $\sigma_1$  и  $j_1$  молниеносно записываются:

$$\sigma_1 = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial r}{\partial e} \dot{e}_1 + \frac{\partial r}{\partial p} \dot{p}_1 \right) \quad (160)$$

$$j_1 = \frac{1}{2\beta j_0} \left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} \frac{\lambda \sigma_0 + \delta \sigma_0^3}{\frac{\partial r}{\partial \xi}} - 2\gamma \sigma_0 \sigma_1 + \frac{\partial \sigma_0}{\partial e} \dot{e}_1 + \frac{\partial \sigma_0}{\partial p} \dot{p}_1 \right) \quad (161)$$

Предположим, мы сумели найти импульсы в  $\epsilon^1$  приближении. Осталось только суметь проинтегрировать уравнения ЕОВ. По схожему принципу будем находить зависимость  $t$  и  $\phi$  от  $p$ . Однако сразу появляется проблема, связанная с  $\xi$ , ведь изначально мы положили  $e$  и  $p$  не зависящими от нее, в то время как, скажем,  $\frac{\partial H}{\partial p_r}$  зависит в нашей параметризации. В таком случае придется в некотором месте все усреднить по  $\psi_r$ . Изначально мы имеем

$$t(p) = \int dr' \left( \frac{\partial H}{\partial p_r} \right)^{-1} (e, p, \xi) \quad (162)$$

где  $dr' = \frac{M}{1+e \cos \xi} dp - \frac{M \cos \xi}{(1+e \cos \xi)^2} de$ . Дифференциал  $\xi$  осознанно опускаем. Так мы получаем криволинейный интеграл второго рода.

$$t(p) = \int \left( \frac{\partial H}{\partial p_r} \right)^{-1} \left( \frac{M}{1+e \cos \xi} dp - \frac{M \cos \xi}{(1+e \cos \xi)^2} de \right) \quad (163)$$

Воспользуемся знанием зависимости  $e$  от  $p$ , произведем переход к интегрированию по одной переменной, и здесь же усредним подынтегральное выражение.

$$t(p) = \int_{p_0}^p \left\langle \left( \frac{\partial H}{\partial p_r} \right)^{-1} \left( \frac{M}{1+e \cos \xi} - \frac{M \cos \xi}{(1+e \cos \xi)^2} e'_p \right) \right\rangle_{\psi_r} dp \quad (164)$$

Аналогичные действия производим для  $\phi$ .

$$\phi(p) = \int_{p_0}^p \left\langle \left( \frac{\partial H}{\partial p_\phi} \right) \left( \frac{\partial H}{\partial p_r} \right)^{-1} \left( \frac{M}{1+e \cos \xi} - \frac{M \cos \xi}{(1+e \cos \xi)^2} e'_p \right) \right\rangle_{\psi_r} dp \quad (165)$$

## 12 Метод быстрой фазы

После того, как была описана необходимость усреднения системы (130), время вернуться к поискам учета осциллирующих частей силы. В двух последующих разделах будут изначально даны общие выводы уравнений, а потом непосредственные расчеты для системы коллапсирующих тел.

Рассмотрим динамическую систему, состояние которой характеризуется угловой переменной  $\alpha$ , переменными  $x_1, x_2, \dots, x_r$  и описывается следующей системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx_k}{dt} = X_k(\alpha, x_1, \dots, x_r) \\ \frac{d\alpha}{dt} = \lambda\omega(x_1, \dots, x_r) + A(\alpha, x_1, \dots, x_r) \end{cases} \quad (166)$$

где  $\lambda$ - большой параметр,  $X_k(\alpha, x_1, \dots, x_r)$ ,  $A(\alpha, x_1, \dots, x_r)$  - периодические функции,  $\lambda\omega$  - соответствует частоте вращения  $\alpha$ . Покажем, что переменную  $\alpha$  можно исключить из правых частей уравнений (166) с любой степенью точности в разложении по степеням  $\frac{1}{\lambda}$ . Для этого найдем замену переменных:

$$\begin{cases} x_k = \bar{x}_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} u_k^{(n)}(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r) & (k = 1, 2, \dots, r) \\ \alpha = \bar{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} v^{(n)}(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r) & (k = 1, 2, \dots, r) \end{cases} \quad (167)$$

с помощью которой систему (166) можно привести к виду:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}_k}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} X_k^{(n)}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r) \\ \frac{d\bar{\alpha}}{dt} = \lambda\omega(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} A^{(n)}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r) \end{cases} \quad (168)$$

так, чтобы коэффициенты в уравнении не зависели от угловой переменной  $\alpha$ . Физический смысл преобразования (167) заключается в разложении действительного движения, описываемого переменными  $x_1, x_2, \dots, x_r, \alpha$ , на усредненное движение с координатами  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r$  и дрожание, описываемое углом  $\bar{\alpha}$  и функциями  $u^{(n)}(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)$ ,  $v^{(n)}(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)$ .

Определение функций, входящих в уравнение (167) неоднозначно ввиду произвола, с которым можно относить различные степени разложения или к основному, или к высшим членам ряда.

Подставляем (167) в (166) и приравнивая члены при  $\lambda, \lambda^0, \lambda^{-1}$  получим систему четырех уравнений для определения шести функции:  $A^{(0)}, A^{(1)}, X_k^{(0)}, X_k^{(1)}, u_k^{(1)}, v^{(1)}$

$$X_k^{(0)} + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \bar{\alpha}} \omega = X_k \quad (169)$$

$$X_k^{(1)} + \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial \bar{\alpha}} \omega + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \bar{\alpha}} A^{(0)} + \sum_{q=1}^r \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \bar{x}_q} X_q^{(0)} = \frac{\partial X_k}{\partial \bar{\alpha}} v^{(1)} + \sum_{q=1}^r \frac{\partial X_k}{\partial \bar{x}_q} u_q^{(1)} \quad (170)$$

$$A^{(1)} + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \bar{\alpha}} \omega + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \bar{\alpha}} A^{(0)} + \sum_{q=1}^r \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \bar{x}_q} X_q^{(0)} = \sum_{p=1}^r \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}_p} u_p^{(2)} + \frac{1}{2} \sum_{p,q} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{x}_p \partial \bar{x}_q} u_p^{(1)} u_q^{(1)} + \frac{\partial A}{\partial \bar{\alpha}} v^{(1)} + \sum_{q=1}^r \frac{\partial A}{\partial \bar{x}_q} u_q^{(1)} \quad (171)$$

$$A^{(0)} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \bar{\alpha}} \omega = \sum_{q=1}^r \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}_q} u_q^{(1)} + A \quad (172)$$

В системе (169-172) число неизвестных больше числа уравнений, что вполне согласуется со сделанными выше замечанием о неоднозначности. Недостающие уравнения получаются из условия отсутствия нулевых гармоник  $u_k^{(n)}, v^{(n)}$ .

Разложим функции  $A(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)$ ,  $X_k(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)$  в ряды Фурье

$$A(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r) = \sum_{-\infty < m < \infty} A_m e^{im\bar{\alpha}} \quad (173)$$

$$X_k(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r) = \sum_{-\infty < m < \infty} X_{k,m} e^{im\bar{\alpha}} \quad (174)$$

Усредняя уравнения (169-172) по  $\bar{\alpha}$ , находим:

$$X_k^{(0)} = X_{k,0} \quad (175)$$

$$u_k^{(1)} = \frac{1}{\omega} \sum_{n \neq 0} X_{k,m} \frac{e^{in\bar{\alpha}}}{in} \quad (176)$$

$$A^{(0)} = A_0 \quad (177)$$

$$v^{(1)} = \sum_{n \neq 0} \frac{A^{(n)} e^{in\bar{\alpha}}}{in\omega} - \sum_{n \neq 0} \sum_{q=1}^r \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}_q} \frac{X_q^{(n)}}{n^2 \omega^2} e^{in\bar{\alpha}} \quad (178)$$

$$A^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{p,q} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{x}_p \partial \bar{x}_q} u_p^{(1)} u_q^{(1)} + \frac{\partial A}{\partial \bar{\alpha}} v^{(1)} + \sum_{q=1}^r \frac{\partial A}{\partial \bar{x}_q} u_q^{(1)} \quad (179)$$

$$X_k^{(1)} = \frac{\partial X_k}{\partial \bar{\alpha}} v^{(1)} + \sum_{q=1}^r \frac{\partial X_k}{\partial \bar{x}_q} u_q^{(1)} \quad (180)$$

С помощью (181-182) уравнения (175-180) приводятся к виду

$$A^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{p,q,n(n \neq 0)} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{x}_p \partial \bar{x}_q} \frac{1}{\omega^2 n^2} X_{p,n} X_{q,-n} + \sum_{q,n(n \neq 0)} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}_q} \frac{1}{i\omega^2 n} A_n X_{q,-n} - \sum_{n \neq 0} \frac{1}{\omega} A_n A_{-n} \quad (181)$$

$$- \sum_{q,n(n \neq 0)} \frac{1}{i\omega n} \frac{\partial A_n}{\partial \bar{x}_q} X_{q,-n}$$

$$X_k^{(1)} = - \sum_{n(n \neq 0)} \frac{1}{\omega} X_{k,n} A_{-n} - \sum_{q,n(n \neq 0)} \frac{1}{i\omega n} \frac{\partial X_{k,n}}{\partial \bar{x}_q} X_{q,-n} + \sum_{q,n(n \neq 0)} \frac{1}{i\omega^2 n} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}_q} X_{k,n} X_{q,-n} \quad (182)$$

Перейдем от комплексных рядов Фурье к действительным рядам:

$$A = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n \cos n\bar{\alpha} + g_n \sin n\bar{\alpha}) \quad (183)$$

$$X_k = X_{k,0} + \sum_{n=1}^{\infty} (F_{k,n} \cos n\bar{\alpha} + G_{k,n} \sin n\bar{\alpha}) \quad (184)$$

Представим формулы для замены переменных (167) с помощью уравнений (183-184) в виде

$$x_k = \bar{x}_k + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega} (-G_{k,n} \cos n\bar{\alpha} + F_{k,n} \sin n\bar{\alpha}) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad (185)$$

$$\alpha = \bar{\alpha} + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega} (-g_n \cos n\bar{\alpha} + f_n \sin n\bar{\alpha}) - \frac{1}{\lambda} \sum_{n,q} \frac{1}{n^2 \omega^2} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}_q} (F_{q,n} \cos n\bar{\alpha} + G_{q,n} \sin n\bar{\alpha}) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad (186)$$

В окончательном виде система уравнений (166) после подстановки найденных коэффициентов принимает наглядный вид

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}_k}{dt} = X_{x,0} - \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\omega} (F_{k,n}f_n + G_{k,n}g_n) - \frac{1}{\lambda} \sum_{n,q} \frac{1}{2n\omega} \left( \frac{\partial F_{k,n}}{\partial \bar{x}_q} G_{q,n} - \frac{\partial G_{k,n}}{\partial \bar{x}_q} F_{q,n} \right) + \\ + \frac{1}{\lambda} \sum_{q,n} \frac{1}{2\omega^2 n} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}_q} (F_{k,n}G_{q,n} - G_{q,n}F_{q,n}) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \end{aligned} \quad (187)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\alpha}}{dt} = \lambda\omega + A_0 + \frac{1}{\lambda} \sum_{p,q,n} \frac{1}{2\omega^2 n} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{x}_q \partial \bar{x}_p} (F_{p,n}F_{q,n} + G_{p,n}G_{q,n}) - \\ - \frac{1}{\lambda} \sum_{q,n} \frac{1}{2\omega^2 n} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}_q} (F_{q,n}g_n - f_n G_{q,n}) + \frac{1}{\lambda} \sum_{n,q} \frac{1}{2n\omega} \left( \frac{\partial g_n}{\partial \bar{x}_q} F_{q,n} - \frac{\partial f_n}{\partial \bar{x}_q} G_{q,n} \right) - \\ - \frac{1}{\lambda} \sum_n \frac{1}{2\omega} (f_n^2 + g_n^2) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \end{aligned} \quad (188)$$

Опишем вкратце какие формулы появятся при учете следующего порядка по  $\lambda$ . Из-за громозкости вывода и конечного вида всех формул, дадим лишь промежуточный результат.

$$u_k^{(2)} = -\frac{A^{(0)}}{\omega^2} \sum_{m(m \neq 0)} X_{k,m} \frac{e^{im\bar{\alpha}}}{im} - \frac{1}{\omega^2} \sum_{m(m \neq 0)} \frac{\partial X_{k,m}}{\partial x_q} X_q^{(0)} \frac{e^{im\bar{\alpha}}}{(im)^2} \quad (189)$$

$$\begin{aligned} v^{(2)} = \frac{1}{\omega^3} (-2A^{(0)} \sum_{m(m \neq 0)} \frac{e^{im\bar{\alpha}}}{(im)^2} \frac{\partial \omega}{\partial x_n} X_{n,m} - 2 \sum_{m(m \neq 0)} \frac{e^{im\bar{\alpha}}}{(im)^3} \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \frac{\partial X_{n,m}}{\partial x_q} X_q^{(0)}) - \\ - \frac{A^0}{\omega^2} \sum_{m(m \neq 0)} \frac{A_m e^{im\bar{\alpha}}}{im} + \frac{A^0}{\omega^2} \sum_{m(m \neq 0)} \frac{e^{im\bar{\alpha}}}{(im)^2} \frac{\partial A_m}{\partial x_q} X_q^0 - \frac{A^{(0)}}{\omega^3} \sum_{m(m \neq 0)} \frac{e^{im\bar{\alpha}}}{(im)^3} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_n \partial x_q} X_{n,m} X_q^{(0)} \end{aligned} \quad (190)$$

$$X_k^{(2)} = \widetilde{\frac{\partial X_k}{\partial \alpha} v^{(2)}} + \widetilde{\frac{\partial X_k}{\partial x_q} u_q^{(2)}} \quad (191)$$

$$A^{(2)} = \frac{1}{6} \sum_{n,m,q} \frac{\partial^3}{\partial x_n \partial x_m \partial x_q} u_n^{(1)} \widetilde{u_m^{(1)} u_q^{(1)}} + \widetilde{\frac{\partial A}{\partial \alpha} v^{(2)}} + \widetilde{\frac{\partial A}{\partial x_q} u_q^{(2)}} + \frac{1}{2} \sum_{n,m} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_n \partial x_m} \widetilde{u_n^{(2)} u_m^{(1)}} \quad (192)$$

Система уравнений (187-188), дает решение поставленной в начале параграфа задачи с точностью до величин первого порядка малости включительно относительно параметра  $\frac{1}{\lambda}$ . Первая группа уравнений этой системы выражает систематическое движение. Ну и как показано, данный метод можно обобщить на случай больших порядков.

Сделанные теоретические выкладки применим к системе, с которой мы все это время и работали. В качестве угла, по которому будет делаться усреднение, возьмем  $\psi_r$ . С математической точки зрения - это самый правильный подход, потому что силы будут периодическими только по нему

$$\frac{d\psi_r}{dt} = \omega_r = p\omega + A^{(0)} \quad (193)$$

Нахождение коэффициентов ряда Фурье по углу  $\psi_r$  связано с рядом трудностей.

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi_r f e^{-ik\psi_r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f e^{-ik\psi_r} d\psi_r = \int_0^{2\pi} f e^{-ik\psi_r} \frac{1}{\mathcal{P}} dx \quad (194)$$

Если делать в лоб, то нужна зависимость  $\xi$  от  $\psi_r$ , ну а если пытаться проделывать интегрирование по  $\xi$ , то нужна обратная зависимость. В некотором приближении по  $\frac{1}{p}$  связь  $\xi$  от  $\psi_r$  можно записать как:

$$\psi_r = \omega_r \int \frac{dx}{\mathcal{P}} = \omega_r M p^{3/2} \left[ \left( 1 - \frac{\nu(1-e^2)}{2p} \right) \left( \frac{2 \arctan \left( \frac{(1-e) \tan \frac{x}{2}}{\sqrt{1-e^2}} \right)}{(1-e^2)^{3/2}} - \frac{e \sin x}{(1-e^2)(1+e \cos x)} \right) + \frac{3}{p} \frac{2 \arctan \left( \frac{(1-e) \tan \frac{x}{2}}{\sqrt{1-e^2}} \right)}{(1-e^2)^{1/2}} \right] \quad (195)$$

Но в данном подходе взятие интегралов осложнено, поэтому воспользуемся скрытым свойством формул для сил и перейдем от записи уравнений через суммы к интегралам. Конечный вид уравнений будет выглядеть как

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} = & \omega_r \int_0^{2\pi} \frac{F_p}{\mathcal{P}} dx - \frac{\omega_r^2}{\omega p} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^y \frac{F_p}{\mathcal{P}} dx - \frac{y}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F_p}{\mathcal{P}} dx \right) \frac{\partial F_p}{\partial p} \frac{1}{\mathcal{P}} dy - \\ & \frac{\omega_r^2}{\omega p} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^y \frac{F_e}{\mathcal{P}} dx - \frac{y}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F_e}{\mathcal{P}} dx \right) \frac{\partial F_p}{\partial e} \frac{1}{\mathcal{P}} dy + \frac{\omega_r^2}{\omega^2 p} \frac{\partial \omega}{\partial e} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^y \frac{F_e}{\mathcal{P}} dx - \frac{y}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F_e}{\mathcal{P}} dx \right) F_p dy + \\ & \frac{\omega_r^2}{\omega^2 p} \frac{\partial \omega}{\partial p} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^y \frac{F_p}{\mathcal{P}} dx - \frac{y}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F_p}{\mathcal{P}} dx \right) F_p dy \end{aligned} \quad (196)$$

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} = & \omega_r \int_0^{2\pi} \frac{F_e}{\mathcal{P}} dx - \frac{\omega_r^2}{\omega p} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^y \frac{F_p}{\mathcal{P}} dx - \frac{y}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F_p}{\mathcal{P}} dx \right) \frac{\partial F_e}{\partial p} \frac{1}{\mathcal{P}} dy - \\ & \frac{\omega_r^2}{\omega p} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^y \frac{F_e}{\mathcal{P}} dx - \frac{y}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F_e}{\mathcal{P}} dx \right) \frac{\partial F_e}{\partial e} \frac{1}{\mathcal{P}} dy + \frac{\omega_r^2}{\omega^2 p} \frac{\partial \omega}{\partial e} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^y \frac{F_e}{\mathcal{P}} dx - \frac{y}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F_e}{\mathcal{P}} dx \right) F_e dy + \\ & \frac{\omega_r^2}{\omega^2 p} \frac{\partial \omega}{\partial p} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^y \frac{F_p}{\mathcal{P}} dx - \frac{y}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F_p}{\mathcal{P}} dx \right) F_e dy \end{aligned} \quad (197)$$

Если проделать необходимые вычисления, то окажется, что все слагаемые, идущие после первого зануляются, поэтому, к сожалению, значения  $F_p$ ,  $F_e$  в постадиабатическом пределе не найдены.

Есть надежда, что следующие поправки будут не нули, но найти их - это проблема, так как применение метода подобного формулам (196-197) требует многократного интегрирования. В следующих формулах опишем вид формул второго порядка усреднения в применении к нашей задаче.

$$\begin{aligned} X_k^{(2)} = & \frac{A^{(0)}}{\omega^3} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_n \partial x_q} \sum_{m(m \neq 0)} \frac{X_{n,m}}{(im)^2} X_{k,-m} X_q^{(0)} + \frac{2A^{(0)}}{\omega^3} \frac{\omega}{\partial x_n} \sum_{m(m \neq 0)} X_{n,m} X_{k,-m} + \\ & \frac{2}{\omega^3} \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \sum_{m(m \neq 0)} \frac{1}{(im)^2} \frac{\partial X_{n,m}}{\partial x_q} X_{k,-m} X_q^{(0)} - \frac{A^{(0)}}{\omega^2} \sum_{m(m \neq 0)} \frac{X_{q,m}}{im} \frac{\partial X_{k,-m}}{\partial x_q} - \frac{1}{\omega^2} \sum_{m(m \neq 0)} \frac{1}{(im)^2} \frac{\partial X_{n,m}}{\partial x_q} \frac{\partial X_{k,-m}}{\partial x_n} \end{aligned} \quad (198)$$

## 13 Two-timescale analysis

Рассмотрим иной способ вычисления средних значений за период параметров орбиты. Пускай  $e$  и  $p$  можно разложить по малому параметру:

$$e = e_0 + \epsilon e_1 + \epsilon^2 e_2 + \dots \quad (199)$$

$$p = p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \dots \quad (200)$$

Тогда знание поведения  $e_0$  и  $p_0$  дадут адиабатическое приближение подобно тому, как это делают в постньютоновской теории. Для того, чтоб можно было находить эволюцию этих параметров согласно статье [11], необходимо соблюдение нескольких условий. Пускай изначально мы имеем уравнения

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial E} F_E(p, e, \xi) + \frac{\partial p}{\partial p_\phi} F_{p_\phi}(p, e, \xi) = F_p(p, e, \xi) \quad (201)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\partial e}{\partial E} F_E(p, e, \xi) + \frac{\partial e}{\partial p_\phi} F_{p_\phi}(p, e, \xi) = F_e(p, e, \xi) \quad (202)$$

$$\dot{\xi} = \mathcal{P}(e, p, \xi) \quad (203)$$

где силы справа можно разложить по малому параметру  $\epsilon$

$$F_e(p, e, \xi) = F_e^1(p, e, \xi) + \epsilon F_e^2(p, e, \xi) + \dots \quad (204)$$

$$F_p(p, e, \xi) = F_p^1(p, e, \xi) + \epsilon F_p^2(p, e, \xi) + \dots \quad (205)$$

В данных уравнения неявно нужно рассматривать вместо переменной  $\xi$  периодическую переменную  $\psi_r$ . В таком случае, силы должны удовлетворять условиям :

$$F_p(p, e, \psi_r) = F_p(p, e, \psi_r + 2\pi) \quad (206)$$

$$F_e(p, e, \psi_r) = F_e(p, e, \psi_r + 2\pi) \quad (207)$$

Согласно статье выполнение данного условия помогает записать адиабатическое приближение в виде формул (208, 209).

$$\frac{dp_0}{dt} = F_p^1(p_0, e_0) \quad (208)$$

$$\frac{de_0}{dt} = F_e^1(p_0, e_0) \quad (209)$$

$$F_p^1(p_0, e_0) = \frac{\omega_r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F_p^1(p_0, e_0, \xi)}{\mathcal{P}(p_0, e_0, \xi)} d\xi \quad (210)$$

$$F_e^1(p_0, e_0) = \frac{\omega_r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F_e^1(p_0, e_0, \xi)}{\mathcal{P}(p_0, e_0, \xi)} d\xi \quad (211)$$

Вычисление дифференциальных уравнений на  $p_1$  и  $e_1$  в нашем случае требует небольшого ухищрения. В формулах присутствует частота  $\Omega(e, p)$ , не зависящая от  $\xi$  и имеющая  $\epsilon^0$  порядок. В наших формулах ее явно нет, поэтому сделаем небольшое ухищрение. Нам необходимо, чтоб  $\mathcal{P}(e, p, \xi) = \Omega(e, p) + \epsilon g^1(e, p, \xi)$ . Тогда обозначим за  $\Omega(e, p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1+\epsilon \cos x)^2}{Mp^{1.5}} dx$ .

В конечном итоге  $\mathcal{P}(e, p, \xi) = \Omega(e, p) + \frac{(1+\epsilon \cos \xi)^2}{Mp^{1.5}} \left( -\frac{3(1+\epsilon \cos \xi)}{p} \right) + \frac{\nu(1-\epsilon^2)}{2p}$

$$\Omega = \frac{1 + \epsilon^2/2}{Mp^{1.5}} \quad (212)$$

В статье довольно подробно описан способ усреднения и вычисления всех уравнений на эволюцию. Считаю нет необходимости повторять их вывод, но конечный вид уравнений в том виде, в каком их нужно вычислять в нашей задаче, стоит предоставить.

$$\hat{e}_1(y) = \frac{1}{\Omega} \sum_{k \neq 0} \frac{F_e^1(e_0, p_0) e^{ik\psi_r}}{ik} = \frac{\omega_r}{\Omega} \left( \int_0^y \frac{F_e^1(p_0, e_0, \xi)}{\mathcal{P}(p_0, e_0, \xi)} d\xi - \frac{y}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F_e^1(p_0, e_0, \xi)}{\mathcal{P}(p_0, e_0, \xi)} d\xi \right) \quad (213)$$

$$\hat{p}_1(y) = \frac{1}{\Omega} \sum_{k \neq 0} \frac{F_p^1(e_0, p_0) e^{ik\psi_r}}{ik} = \frac{\omega_r}{\Omega} \left( \int_0^y \frac{F_p^1(p_0, e_0, \xi)}{\mathcal{P}(p_0, e_0, \xi)} d\xi - \frac{y}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F_p^1(p_0, e_0, \xi)}{\mathcal{P}(p_0, e_0, \xi)} d\xi \right) \quad (214)$$

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_1(y) = & \frac{1}{\Omega} \left( \Omega'_p(e_0, p_0) \omega_r \int \frac{\hat{p}_1(y)}{\mathcal{P}(p_0, e_0, y)} dy + \Omega'_e(e_0, p_0) \omega_r \int \frac{\hat{e}_1(y)}{\mathcal{P}(p_0, e_0, y)} dy + \right. \\ & \left. + \omega_r \left( \int_0^y \frac{\mathcal{P}(p_0, e_0, x) - \Omega}{\mathcal{P}(p_0, e_0, x)} dx - \frac{y}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathcal{P}(p_0, e_0, x) - \Omega}{\mathcal{P}(p_0, e_0, x)} dx \right) \right) \quad (215) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 = & \frac{\partial F_p^1(p_0, e_0)}{\partial p_0} p_1 + \frac{\partial F_p^1(p_0, e_0)}{\partial e_0} e_1 + F_p^2(p_0, e_0) + \frac{\omega_r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{\xi}_1(\psi_r) \frac{\partial F_p^1(p_0, e_0, \xi)}{\partial \xi} \frac{1}{\mathcal{P}(p_0, e_0, \xi)} d\xi + \\ & + \frac{\omega_r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{e}_1(\psi_r) \frac{\partial F_p^1(p_0, e_0, \xi)}{\partial e_0} \frac{1}{\mathcal{P}(p_0, e_0, \xi)} d\xi + + \frac{\omega_r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{p}_1(\psi_r) \frac{\partial F_p^1(p_0, e_0, \xi)}{\partial p_0} \frac{1}{\mathcal{P}(p_0, e_0, \xi)} d\xi \quad (216) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 = & \frac{\partial F_e^1(p_0, e_0)}{\partial p_0} p_1 + \frac{\partial F_e^1(p_0, e_0)}{\partial e_0} e_1 + F_e^2(p_0, e_0) + \frac{\omega_r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{\xi}_1(\psi_r) \frac{\partial F_e^1(p_0, e_0, \xi)}{\partial \xi} \frac{1}{\mathcal{P}(p_0, e_0, \xi)} d\xi + \\ & + \frac{\omega_r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{e}_1(\psi_r) \frac{\partial F_e^1(p_0, e_0, \xi)}{\partial e_0} \frac{1}{\mathcal{P}(p_0, e_0, \xi)} d\xi + + \frac{\omega_r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{p}_1(\psi_r) \frac{\partial F_e^1(p_0, e_0, \xi)}{\partial p_0} \frac{1}{\mathcal{P}(p_0, e_0, \xi)} d\xi \quad (217) \end{aligned}$$

За разложение по степеням  $\epsilon$  давайте возьмем степень радиационной поправки силы. Как известно, их можно посчитать с различной степенью точности при учете различных постньютоновских поправок. Поэтому пускай порядком малости будет служить степень поправки. В таком случае частное дифференцирование параметров орбиты по импульсу и энергии можно не расписывать и оставить в виде формулы.

В таком случае производные параметров порядка справа будут иметь следующие величины

$$F_p^1 = \frac{\partial p}{\partial E} F_E^0 + \frac{\partial p}{\partial p_\phi} F_\phi^0 \quad (218)$$

$$F_e^1 = \frac{\partial e}{\partial E} F_E^0 + \frac{\partial e}{\partial p_\phi} F_\phi^0 \quad (219)$$

где, если обратиться к формулам (117-118), видно, что

$$F_E^0 = \frac{32}{5} \frac{\mu^2 M^2}{r^4} \left[ v^2 - \frac{11}{12} r \dot{r}^2 \right] \quad (220)$$

$$F_\phi^0 = \frac{\mu^2 M \dot{\phi}}{r} \left[ \frac{16}{5} v^2 - \frac{24}{5} r \dot{r}^2 + \frac{16}{5} \frac{M}{r} \right] \quad (221)$$

Использование таких сил приводит нас к тому, что интегралы, содержащие  $\hat{\xi}_1, \hat{e}_1, \hat{p}_1$  за-  
нуляются. Конечные формулы заметно упрощаются.

$$\dot{p}_0 = \frac{\partial p}{\partial E} \langle F_E \rangle + \frac{\partial p}{\partial p_\phi} \langle F_\phi \rangle \dot{e}_0 = \frac{\partial e}{\partial E} \langle F_E \rangle + \frac{\partial e}{\partial p_\phi} \langle F_\phi \rangle \quad (222)$$

$$\begin{aligned} p_1 = & \frac{\partial p}{\partial E} I_1 + \frac{\partial p}{\partial p_\phi} I_2 + \left( \frac{\partial p}{\partial E} I_e^1 + \frac{d}{de} \frac{\partial p}{\partial E} \langle F_E \rangle + \frac{\partial p}{\partial p_\phi} I_e^2 + \frac{d}{de} \frac{\partial p}{\partial p_\phi} \langle F_\phi \rangle \right) e_1 + \\ & + \left( \frac{\partial p}{\partial E} I_p^1 + \frac{d}{dp} \frac{\partial p}{\partial E} \langle F_E \rangle + \frac{\partial p}{\partial p_\phi} I_p^2 + \frac{d}{dp} \frac{\partial p}{\partial p_\phi} \langle F_\phi \rangle \right) p_1 \end{aligned} \quad (223)$$

$$(224)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 = & \frac{\partial e}{\partial E} I_1 + \frac{\partial e}{\partial p_\phi} I_2 + \left( \frac{\partial e}{\partial E} I_e^1 + \frac{d}{de} \frac{\partial e}{\partial E} \langle F_E \rangle + \frac{\partial e}{\partial p_\phi} I_e^2 + \frac{d}{de} \frac{\partial e}{\partial p_\phi} \langle F_\phi \rangle \right) e_1 + \\ & + \left( \frac{\partial e}{\partial E} I_p^1 + \frac{d}{dp} \frac{\partial e}{\partial E} \langle F_E \rangle + \frac{\partial e}{\partial p_\phi} I_p^2 + \frac{d}{dp} \frac{\partial e}{\partial p_\phi} \langle F_\phi \rangle \right) p_1 \end{aligned} \quad (225)$$

Значения  $\langle F_E^0 \rangle, \langle F_\phi^0 \rangle, I_e^1, I_e^2, I_p^1, I_p^2, I_1, I_2$  вычислены согласно формулам (242-243) и ниже приведены.

$$\langle F_E^0 \rangle = -\frac{(1-e^2)^{3/2} \mu^2}{15M^2 p^6} (37e^6(-3+\nu) - 96(\nu+p) - e^4(720+255\nu+37p) - 4e^2(18+49\nu+73p)) \quad (226)$$

$$\langle F_\phi^0 \rangle = -\frac{(1-e^2)^{3/2} \mu^2}{5Mp^{9/2}} (e^4(-71+34\nu) - 32(\nu+p) - 2e^2(32+\nu+14p)) \quad (227)$$

$$\begin{aligned} I_e^1 = & \frac{e(1-e^2)^{0.5} \mu^2}{60M^2 p^7} (4(40e^2(63-50\nu) + 333e^6(-3+\nu) + 8(18+13\nu) + \\ & 3e^4(-1458+521\nu))p - 4(-296+1312e^2+259e^4)p^2) \end{aligned} \quad (228)$$

$$I_e^2 = \frac{e(1-e^2)^{1/2} \mu^2}{5Mp^{9/2}} (128 - 92\nu + 7e^4(-71+34\nu) - 40p - 2e^2(18+73\nu+70p)) \quad (229)$$

$$I_p^1 = \frac{(1 - e^2)^{3/2} \mu^2}{M^2 p^7} \left( (e^2 \left( -\frac{144}{5} - \frac{392\nu}{5} \right) - \frac{192\nu}{5} + e^6 \left( -\frac{222}{5} + \frac{74\nu}{5} \right) + e^4 (-288 + 102\nu) \right) + \left( -32 - \frac{292e^2}{3} + \frac{37e^4}{3} \right) p \quad (230)$$

$$I_p^2 = \frac{(1 - e^2)^{3/2} \mu^2}{M p^{5.5}} \left( -\frac{144\nu}{5} + e^2 \left( -\frac{288}{5} - \frac{9\nu}{5} + e^2 \left( -\frac{639}{10} + \frac{153\nu}{5} \right) \right) + \left( -\frac{112}{5} - \frac{98e^2}{5} \right) p \right) \quad (231)$$

$$I_1 = \frac{(1 - e^2)^{1.5} \mu^2}{840 M^2 p^6} \left( -16(1247 + 756\nu) - 8e^2(9685 + 6104\nu) + e^4(-6342 + 2393e^2 + 42(1240 + 1006e^2 + 35e^4)\nu) \right) \quad (232)$$

$$I_2 = -\frac{(1 - e^2)^{1.5} \mu^2}{420 M p^{4.5}} \left( 9976 + 7392\nu + 8e^2(1097 + 2828\nu) + e^4(-4787 + 2884\nu) \right) \quad (233)$$

Использование порядка малости в виде  $\frac{1}{p}$  позволит получить поправки, вызываемые осцилляционными слагаемыми, однако с позиций теории взятие порядка малости в виде PN предпочтительней, но, к сожалению, не дает никаких результатов.

## 14 Применение уравнений на эволюцию

Предположим, что мы смогли найти уравнения на эволюцию параметров орбиты с необходимой точностью.

$$\frac{de}{dt} = F_e(e, p) \quad (234)$$

$$\frac{dp}{dt} = F_p(e, p) \quad (235)$$

В таком случае мы имеем возможность построить уравнение, решение которого давало бы связь  $e$  и  $p$  в зависимости от начальных условий. Наглядно мы могли бы построить  $p$ - $e$  поверхность, как это сделано в разделе 5 для Шварцшильдовской метрики.

$$\frac{dp}{de} = \frac{F_p(e, p)}{F_e(e, p)} \quad (236)$$

## 15 Начальные условия для параметров орбиты

Если мы будем решать систему (238-239), тогда как никак нам понадобятся начальные условия, которые бы характеризовали некоторую орбиту. Однако стоит заметить, что начальные условия, которые мы хотели бы использовать, характеризуют орбиту в бессильном режиме. По факту и чисто физически необходимо подставлять в качестве начальных условий подправленные параметры орбиты, где учитывается влияние радиационных сил.

Покажем, как можно вычислить хотя бы первую поправку. Как известно значение импульсов и энергии системы вычисляется из условия  $\frac{\partial H}{\partial p_r} = 0$ , что в полной мере соответствует условию

$$p_r(e, p) = 0 \quad (237)$$

Воспользуемся разложением импульса по  $\epsilon$  формулы (142).

$$p_r = \sigma_0 + \sigma_1 \epsilon^1 + \sigma_2 \epsilon^2 \quad (238)$$

$$\sigma_0(e_0, p_0) + \frac{\partial \sigma_0}{\partial e}(e_0, p_0)e_1 + \frac{\partial \sigma_0}{\partial p}(e_0, p_0)p_1 + \sigma_1(e_0, p_0) = 0 \quad (239)$$

$\sigma_0(e_0, p_0) = 0$  в точках поворота, поэтому поправку к эксцентриситету можно записать в виде:

$$e_1 = -\frac{\frac{\partial \sigma_0}{\partial p}(e_0, p_0)p_1 + \sigma_1(e_0, p_0)}{\frac{\partial \sigma_0}{\partial e}(e_0, p_0)} \quad (240)$$

По хорошему нужно найти еще одно уравнение, связывающее  $e_1$ ,  $p_1$ . Но для начала можно ограничиться занулением  $p_1$  в формуле (240).

Как один из способов, вторую формулу можно получить, рассматривая силу в виде  $\theta(t - t_0)F_{force}$ . В момент времени  $t_0 - \delta$  ( $\delta \ll 1$ ) энергия системы равна  $E(e_0, p_0)$ , в момент времени  $t_0 + \delta$  энергия системы равна  $E(e + \epsilon e_1, p_0 + \epsilon p_1)$ . С физической точки зрения эти величины должны быть равны, отсюда получаем вторую формулу для нахождения радиационной поправки.

$$\frac{\partial E}{\partial e}(e_0, p_0)e_1 + \frac{\partial E}{\partial p}(e_0, p_0)p_1 = 0 \quad (241)$$

В конечном виде поправка к параметрам орбиты выглядит как

$$e_1 = \frac{\frac{\partial E}{\partial p}(e_0, p_0)\sigma_1(e_0, p_0)}{\frac{\partial E}{\partial e}(e_0, p_0)\frac{\partial \sigma_0}{\partial p}(e_0, p_0) - \frac{\partial E}{\partial p}(e_0, p_0)\frac{\partial \sigma_0}{\partial e}(e_0, p_0)} \quad (242)$$

$$p_1 = -\frac{\frac{\partial E}{\partial e}(e_0, p_0)\sigma_1(e_0, p_0)}{\frac{\partial E}{\partial e}(e_0, p_0)\frac{\partial \sigma_0}{\partial p}(e_0, p_0) - \frac{\partial E}{\partial p}(e_0, p_0)\frac{\partial \sigma_0}{\partial e}(e_0, p_0)} \quad (243)$$

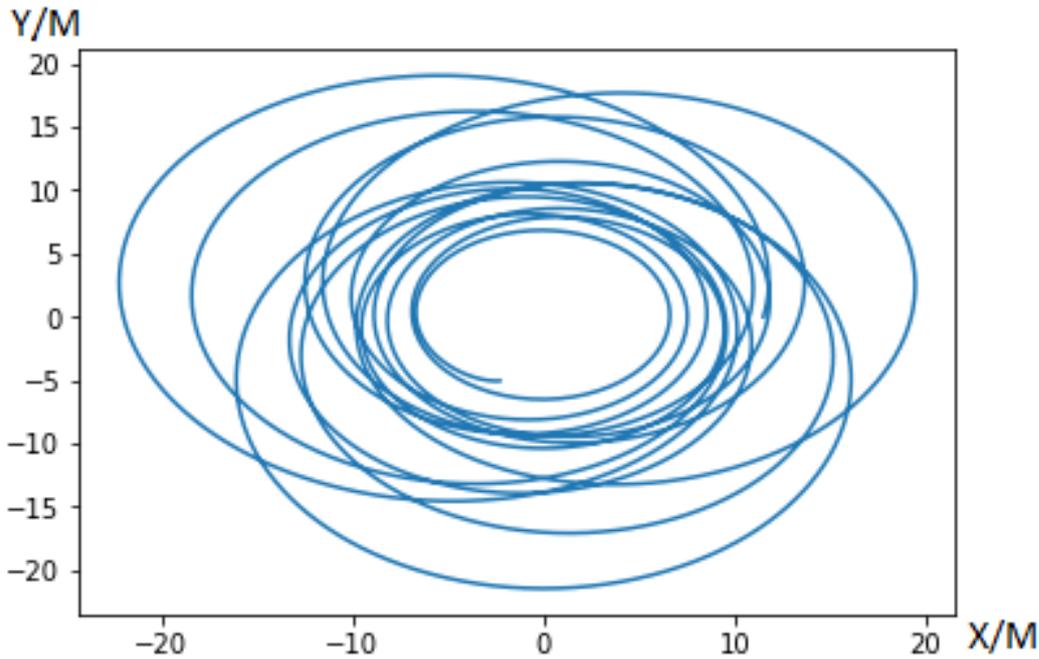
## 16 Иллюстрация численного решения системы дифференциального уравнения

На основе численного решения системы (238-239) графически изобразим орбиту сталкивающей системы в координатах  $x$  и  $y$ .

$$x = r \cos \phi \quad (244)$$

$$y = r \sin \phi \quad (245)$$

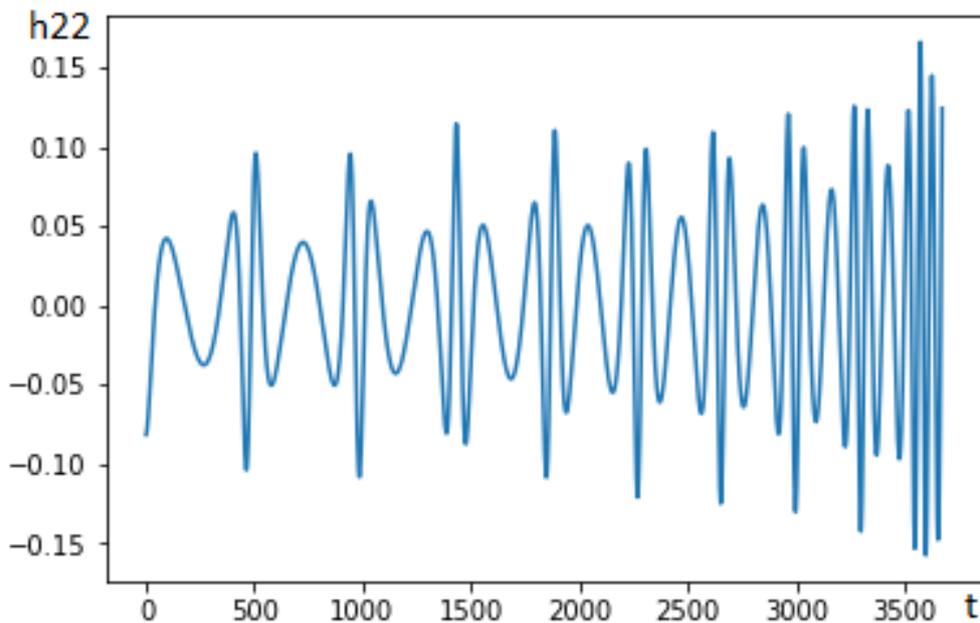
В качестве начальных условий возьмем параметры орбиты равными  $e = 0.4$ ,  $p = 14$ .



Чтоб для данной орбиты построить сигнал waveform при малом эксцентриситете, достаточно рассмотреть моду волны (2,2).

$$h_+ - ih_- = \sum_l \sum_{m=-l}^l h_{lm} Y_{lm}^{(-2)}(\theta, \phi) \quad (246)$$

Видно явно влияние эксцентриситета на форму сигнала. Более короткие волны проявляются по причине утрата системой эксцентриситета.



## 17 Пост-постадиабатические поправки на практике

Как упоминалось ранее существует явная проблема в подсчете аналитического выражения пост-постадиабатической поправки. Поэтому остается единственная возможность: использование численных методов. Первым делом рассмотрим высшие поправки метода Боголюбова-Крылова.

$$\vec{X} = \vec{\kappa} + \epsilon \frac{1}{\omega_r} \widetilde{\vec{Y}}(z, \vec{\kappa}) + \epsilon^2 \frac{1}{\omega_r} \widetilde{\vec{Y}}(z, \vec{\kappa}) \quad (247)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\kappa}}{dt} &= \epsilon \frac{\omega_r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mathcal{P}} \widetilde{\vec{Y}}(z, \vec{\kappa}) + \frac{1}{\omega_r} \epsilon \widetilde{\vec{Y}}(z, \vec{\kappa}) + \epsilon^2 \frac{1}{\omega_r} \widetilde{\vec{Y}}(z, \vec{\kappa}) dz = \\ &= \epsilon \frac{\omega_r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mathcal{P}} \widetilde{\vec{Y}}(z, \vec{\kappa}) + \frac{1}{\omega_r} \epsilon \widetilde{\vec{Y}}(z, \vec{\kappa}) + \epsilon^2 \frac{1}{\omega_r} \left( \widetilde{\vec{Y}}(z, \vec{\kappa}) \frac{\partial}{\partial \vec{\kappa}} \right) \frac{1}{\omega_r} \widetilde{\vec{Y}}(z, \vec{\kappa}) dz = \\ &= \epsilon \frac{\omega_r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \widetilde{\vec{Y}}(z, \vec{\kappa}) + \epsilon \left( \left[ \frac{1}{\omega_r} \widetilde{\vec{Y}}(z, \vec{\kappa}) + \epsilon \frac{1}{\omega_r} \left( \widetilde{\vec{Y}}(z, \vec{\kappa}) \frac{\partial}{\partial \vec{\kappa}} \right) \frac{1}{\omega_r} \widetilde{\vec{Y}}(z, \vec{\kappa}) \right] \frac{\partial}{\partial \vec{\kappa}} \right) \widetilde{\vec{Y}}(z, \vec{\kappa}) \right) \frac{1}{\mathcal{P}} dz \\ &= \epsilon^3 \frac{1}{2\pi \omega_r} \int_0^{2\pi} \left( \widetilde{Y}_i(z, \vec{\kappa}) \widetilde{Y}_j(z, \vec{\kappa}) \frac{\partial^2 \widetilde{\vec{Y}}}{\partial \kappa_i \partial \kappa_j}(z, \vec{\kappa}) \right) \frac{1}{\mathcal{P}} dz \end{aligned} \quad (248)$$

В ранних вычислениях было показано, что слагаемое пропорциональное  $\epsilon^2$  после интегрирования зануляется, поэтому нам важно рассматривать лишь  $\epsilon^3$ .

В разделе 11 были описаны формулы, дающие высшие поправки метода быстрой фазы. Как было сказано до этого, там появляются тройные интегралы, которые в полной мере заменяют суммирование. Таким образом, в самом общем случае слагаемые вида

$$\sum_{n \neq 0} \frac{X_{q,n} X_{d,-n}}{(in)^k} \quad (249)$$

где  $\sum_n e^{in\alpha} X_{q,n} = Y_q$ , можно записать в виде интегралла

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{y_2} \left( \int_0^{y_1} Y_q \frac{d\xi}{\mathcal{P}} - \frac{y_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y_q \frac{d\xi}{\mathcal{P}} \right) \frac{dy_1}{\mathcal{P}} \dots Y_d \frac{dy_{k+1}}{\mathcal{P}} \quad (250)$$

Угол  $\xi$  связан с кеплеровой параметризацией. Слагаемых вида  $\sum_{n \neq 0} \frac{X_{q,n} A_{-n}}{(in)^k}$  отсутствуют в нашей задаче, если  $\omega_r$  не зависит от фазы  $\psi_r$  или угла  $\xi$ .

## 18 Заключение

В данной работе первым делом была проведена постановка начальных условий для круговых орбит и вместе с тем проверено, что точность приведенного метода является высокой. Для орбит с эксцентриситетом разработан метод быстрого интегрирования, в котором пока не решена проблема, связанная с параметризацией. Попутно была сделана попытка найти пост-адиабатические поправки к усреднению уравнений на эволюцию параметров орбиты. К сожалению, ни один из трех методов по крайней мере в 1PN приближении не дал ответа. Коль можно было бы найти  $e = e(p)$  с большей точностью, то это могло бы увеличить точность предложенного метода быстрого интегрирования. Для завершения найдена поправка начальных параметров орбиты, которые используются при решении уравнений на эволюцию.

## Литература

1. Tanja Hinderer, Stanislav Babak, "Foundations of an effective-one-body model for coalescing binaries on eccentric orbits"
2. Alessandro Nagar, Piero Rettegno, "Rush the inspiral: efficient Effective One Body time-domain gravitational waveforms"
3. K. G. Arun, Luc Blanchet, Bala R. Iyer, and Moh'd S. S. Qusailah, "Inspiralling compact binaries in quasielliptical orbits: The Complete 3PN energy flux"
4. Alessandro Nagar, "Effective one body Hamiltonian of two spinning black-holes with next-to-next-to-leading order spin-orbit coupling"
5. Alessandra Buonanno, Yanbei Chen, Thibault Damour, "Transition from inspiral to plunge in precessing binaries of spinning black holes"
6. Alessandra Buonanno, Lawrence E. Kidder, Abdul H. Mroué, Harald P. Pfeiffer, Andrea Taracchini, "Reducing orbital eccentricity of precessing black-hole binaries"
7. Ч.Мизнер, К.Торн, Дж.Уилер, "ГРАВИТАЦИЯ"
8. Thibault Damour, "Introductory lectures on the Effective One Body formalism "
9. A. Buonanno, T. Damour, "Effective one-body approach to general relativistic two-body dynamics"
10. Piero Rettegno, "Improving the performance of the TEOBResumS model"
11. Tanja Hinderer and Eanna E. Flanagan Two timescale analysis of extreme mass ratio inspirals in Kerr. I. Orbital Motion
12. Leor Barack and Norichika Sago "Gravitational self-force on a particle in eccentric orbit around a Schwarzschild black hole"
13. Curt Cutler, Daniel Kennefick, Eric Poisson "Gravitational radiation reaction for bound motion around a Schwarzschild black hole"
14. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. "Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний"
15. Adam Pound and Eric Poisson "Osculating orbits in Schwarzschild spacetime, with an application to extreme mass-ratio inspirals"
16. K. G. Arun, Luc Blanchet, Bala R. Iyer, and Moh'd S. S. Qusailah, "Inspiralling compact binaries in quasielliptical orbits: The Complete 3PN energy flux,"