
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра проблем физики и астрофизики

Направление подготовки / специальность: 03.04.01 Прикладные математика и физика

Направленность (профиль) подготовки: Общая и прикладная физика

ВЫЧИСЛЕНИЕ УСКОРЯЮЩЕГО ПОТЕНЦИАЛА И ПРОФИЛЯ ПЛОТНОСТИ ПЛАЗМЫ В МАГНИТОСФЕРЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПУЛЬСАРОВ

(магистерская диссертация)

Студент:

Истомин Арсений Юрьевич

(подпись студента)

Научный руководитель:

Бескин Василий Семенович,
д-р физ.-мат. наук, проф.

(подпись научного руководителя)

Консультант (при наличии):

(подпись консультанта)

Москва 2025

Аннотация

В работе предложен новый метод определения ускоряющего потенциала над полярными шапками радиопульсаров с произвольным углом наклона магнитной оси к оси вращения. В частности, данный метод применим и к ортогональным пульсарам, у которых трехмерная структура ускоряющего потенциала особенно нетривиальна. В основе подхода лежит модель вакуумного зазора, высота и форма верхней границы которого находятся самосогласованно совместно с решением соответствующего уравнения Пуассона. Таким образом, впервые стало возможным с хорошей точностью определить структуру ускоряющего потенциала ортогональных пульсаров и найти для таких объектов поперечные профили концентрации вторичной плазмы. Полученные результаты, в совокупности с новейшими данными обзоров радиотелескопов FAST и MeerKAT, позволили сделать ряд важных выводов, касающихся эволюции радиопульсаров.

Содержание

1 Введение	3
2 Модель вакуумного зазора	5
3 Определение ускоряющего потенциала	7
3.1 Изгибное излучение	7
3.2 Обратное комптоновское рассеяние	8
3.3 Решение уравнения Пуассона	11
3.3.1 Полу-аналитический метод	11
3.3.2 Метод PINN (Physics Informed Neural Networks)	11
3.4 Осесимметричный случай	15
3.5 Неосесимметричный случай	16
4 Профиль плотности вторичной плазмы	19
4.1 Метод расчета	19
4.1.1 Полная плотность	19
4.1.2 Синхротронный каскад	20
4.2 Множественность синхротронного каскада	23
4.3 Источник первичных фотонов	24
4.4 Осесимметричный случай	26
4.5 Неосесимметричный случай	27
4.6 Гамма-факторы вторичных частиц	29
5 Статистика ортогональных радиопульсаров и их функция видимости	31
5.1 Модель эволюции радиопульсаров	31
5.2 Количество ортогональных радиопульсаров	32
5.3 Распределение ортогональных пульсаров по периоду	34
6 Заключение	37

1 Введение

Несмотря на то, что со времени открытия радиопульсаров прошло уже более полувека, мы до сих пор не понимаем многие ключевые моменты, связанные с активностью этих удивительных объектов. Так, например, до сих пор нет единого мнения о том, в область малых или больших ($\sim 90^\circ$) значений эволюционирует угол наклона магнитной оси к оси вращения нейтронной звезды (Lyne et al. (2015), Philippov and Kramer (2022), Abolmasov et al. (2024)). Остается загадкой и сам механизм когерентного радиоизлучения пульсаров.

Отметим, что в значительной степени это было связано с тем, что подробные каталоги, содержащие достаточно полную информацию как о средних профилях импульсного излучения пульсаров, так и об их поляризационных свойствах (Taylor and Manchester (1975), Rankin (1983), Hankins and Rankin (2010)), не выходили за рамки нескольких десятков. Хотя количество известных радиопульсаров уже давно перевалило за несколько тысяч (на конец 2024 года каталог Manchester et al. (2005) содержал уже 3748 источников), детальный статистический анализ был существенно осложнен как недостаточным качеством поляризационных измерений, так и отсутствием больших однородных выборок. Это, безусловно, заметно ограничивало возможности количественной проверки теории эволюции и излучения радиопульсаров.

Однако, накопленные за последние годы данные радиотелескопов MeerKAT (Posselt et al. (2021); Johnston et al. (2023) и FAST (Wang et al. (2023) позволили значительно уточнить характеристики средних профилей интенсивности и поляризации радиоизлучения пульсаров, что, в свою очередь, потребовало построения более детальной теории генерации и распространения излучения в магнитосферах нейтронных звезд. В частности, модель “полого конуса” (Radhakrishnan and Cooke, 1969; Oster and Sieber, 1976), наиболее часто используемая для объяснения свойств наблюдаемых профилей излучения, оказалась излишне упрощенной, поскольку она не учитывает эффекты распространения излучения в магнитосфере нейтронной звезды, такие как рефракция, циклотронное поглощение и предельная поляризация (Beskin and Philippov, 2012).

В свою очередь, для исследования всех перечисленных выше эффектов необходимо иметь количественную модель распределения плотности электрон-позитронной плазмы, истекающей вдоль открытых силовых линий радиопульсара. Так как основным механизмом генерации плазмы в полярных областях нейтронной звезды является однофотонная конверсия γ -квантов, излученных первичными электронами и/или позитронами, ускоренными в области ненулевого продольного электрического поля, для построения соответствующей модели необходимо знать трехмерную структуру ускоряющего потенциала в области над полярной шапкой нейтронной звезды.

Хотя классическая модель вакуумного зазора Рудермана-Сазерленда (Ruderman and Sutherland, 1975) служит хорошей отправной точкой для решения данной задачи, в своей традиционной формулировке она содержит существенную неопределенность — длина свободного пробега фотонов, а следовательно, и геометрия вакуумного зазора сама зависит от величины ускоряющего потенциала. Поэтому фактически данная модель

может быть использована только для достаточно быстрых радиопульсаров, у которых высота зазора много меньше радиуса полярной шапки, и для которых электрическое поле в зазоре можно считать однородным. Тем более эту модель нельзя использовать для ортогональных пульсаров, угол наклона магнитной оси к оси вращения которых близок к 90° . Действительно, как показано в работе [Beskin \(2018\)](#), ускоряющий потенциал таких пульсаров не обладает осевой симметрией и, соответственно, не может быть описан в рамках классической модели. Что же касается активно проводящихся в последние десять лет исследований в рамках частиц в ячейках (PIC) ([Timokhin, 2010](#); [Timokhin and Arons, 2013](#); [Philippov and Spitkovsky, 2014](#); [Timokhin and Harding, 2015](#); [Tchekhovskoy et al., 2016a](#)), то они в подавляющем большинстве (за исключением разве что работы [Cruz et al. \(2021\)](#)) не были направлены на поиск пространственного распределения вторичной плазмы над полярной шапкой.

В данной работе предлагается способ корректной постановки и решения задачи об определении пространственной структуры ускоряющего потенциала, не предполагающий малости высоты зазора H_{gap} по сравнению с радиусом полярной шапки R_0 и осесимметричность потенциала, что делает метод применимым и для ортогональных пульсаров. Последнее замечание особенно важно, так как благодаря возможности наблюдения обоих магнитных полюсов эти объекты особенно информативны ([Arzamasskiy et al., 2017](#)). Помимо этого, из-за малой величины и знакопеременности гольдрайховской плотности в пределах полярной шапки такие пульсары особенно чувствительны к выбору модели генерации плазмы и величине магнитного поля.

Кроме того, нельзя не отметить то, что вышеупомянутые обзоры обсерваторий FAST и MeerKAT позволили детально изучать статистические свойства ортогональных пульсаров. Действительно, впервые мы имеем однородные выборки пульсаров, в которых имеется достаточно (несколько десятков) объектов такого типа, что дает возможность проверить ряд теоретических предсказаний, касающихся ортогональных пульсаров ([Novoselov et al., 2020](#)). Таким образом, построение теории их магнитосферы является важной задачей, решение которой необходимо для интерпретации новейших наблюдательных данных.

В разделе [2](#) будет сформулирована математическая постановка решаемой в работе задачи. Раздел [3](#) посвящен вычислению высоты вакуумного зазора при фиксированном потенциале, решению уравнения Пуассона методом Physics Informed Neural Networks и обсуждению результатов данных вычислений как для неортогональных, так и для ортогональных пульсаров. Раздел [4](#) посвящен обсуждению модели генерации вторичной плазмы и результатам ее применения к определенным ранее потенциалам. В разделе [5](#) мы обсудим как статистические свойства ортогональных радиопульсаров могут разрешить ряд ключевых вопросов касающихся радиопульсаров. В разделе [6](#) подводятся итоги данной работы.

2 Модель вакуумного зазора

Хотя результаты численного моделирования указывают на то, что процесс генерации частиц существенно нестационарен (Timokhin and Harding, 2015; Philippov et al., 2015), в качестве отправной точки нами была выбрана модель стационарного вакуумного зазора (Ruderman and Sutherland, 1975). Действительно, так как, согласно работам Timokhin and Harding (2015); Philippov et al. (2015), плазма периодически полностью покидает магнитосферу, модель Рудермана-Сазерленда позволяет описать начальный этап генерации вторичной плазмы. В данной работе, однако, не будет предполагаться условие $H_{\text{gap}} \ll R_0$, где

$$R_0 = f_*^{1/2} \sqrt{\frac{\Omega R}{c}} R \quad (1)$$

есть радиус полярной шапки. Здесь и далее R , Ω и χ есть радиус, угловая скорость и угол наклона дипольного момента к оси вращения нейтронной звезды, а $f_* \approx 1.59(1 + \sin^2 \chi)$ — безразмерная площадь полярной шапки (Beskin et al., 1983; Gralla et al., 2017).

Стоит отметить, что в последующих вычислениях радиуса кривизны магнитного поля оно будет полагаться дипольным, хотя предлагаемый в работе метод может быть обобщен и для других конфигураций. Здесь мы, однако, рассмотрим упрощенную модель, которая тем не менее позволяет учесть все основные эффекты, связанные с кривизной магнитных силовых линий.

Перейдем теперь к определению электрического потенциала ψ в вакуумной области над полярной шапкой радиопульсара. В стационарном состоянии уравнение Пуассона для вращающейся нейтронной звезды имеет вид (Ruderman and Sutherland, 1975)

$$\Delta\psi = 4\pi(\rho_e - \rho_{\text{GJ}}), \quad (2)$$

где ρ_e — плотность заряда в магнитосфере, а

$$\rho_{\text{GJ}} = -\frac{\Omega \mathbf{B}}{2\pi c} \quad (3)$$

— плотность Гольдрайха-Джулиана (Goldreich and Julian, 1969), необходимая для экранировки продольного электрического поля.

Заметим, что на масштабе высоты зазора область открытых силовых линий мало отличается от цилиндрической, что позволяет пренебречь искривлением силовых линий при выборе расчетной области. Таким образом, можно ввести цилиндрические координаты r_m , ϕ_m , z с центром на оси диполя. При этом везде ниже для величин r_m и z выбрана нормировка на радиус полярной шапки R_0 (1), так что поверхность, отделяющая области открытых и замкнутых силовых линий, определяется условием $r_m = 1$. В то же время кривизну силовых линий необходимо учитывать при вычислении правой части уравнения (2), так как при углах $\chi \sim 90^\circ$ осесимметричный (и независимый от кривизны магнитных силовых линий) вклад стремится к нулю.

В этом случае уравнение, определяющее потенциал $\psi(r_m, \phi_m, z)$ в вакуумной области

($\rho_e \ll \rho_{\text{GJ}}$), будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_m} \frac{\partial}{\partial r_m} \left(r_m \frac{\partial \psi}{\partial r_m} \right) + \frac{1}{r_m^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi_m^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \\ &= -2 \frac{\Omega B_0 R_0^2}{c} \left(\cos \chi + \frac{3}{2} \frac{R_0}{R} r_m \sin \chi \sin \varphi_m \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь мы воспользовались известным выражением для косинуса угла между осью вращения и магнитным полем $\cos \theta_b \approx \cos \chi + (3/2)(R_0/R) r_m \sin \chi \sin \varphi_m$, справедливым для дипольных силовых линий.

Если высоту зазора $H_{\text{gap}} = H_{\text{gap}}(r_m, \phi_m)$ считать заданной функцией, то граничные условия для уравнения (4) запишутся в виде

$$\psi(r_m, \varphi_m, z = 0) = 0, \quad (5)$$

$$\psi(r_m = 1, \varphi_m, z) = 0, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial z}(r_m, \varphi_m, z) \right|_{z=H_{\text{gap}}(r_m, \varphi_m)} = 0. \quad (7)$$

Иными словами, необходимо потребовать равенство нулю потенциала ψ на поверхности нейтронной звезды и на сепаратрисе, разделяющей открытые и замкнутые магнитные силовые линии, а также равенство нулю продольного электрического поля на верхней границе области ускорения $z = H_{\text{gap}}$ (Timokhin and Harding, 2015; Novoselov et al., 2020).

Однако для нахождения самой функции H_{gap} необходимо конкретизировать процесс рождения вторичной плазмы, что невозможно без знания энергий первичных частиц, которые сами зависят от величины H_{gap} , так как ускоряющий потенциал ψ функционально зависит от высоты зазора: $\psi = \psi[H_{\text{gap}}]$. В итоге корректная постановка задачи состоит в одновременном самосогласованном определении двух функций: $\psi(r_m, \phi_m, z)$ и $H_{\text{gap}}(r_m, \phi_m)$, таких что

$$\left. \frac{\partial \psi(r_m, \phi_m, z)}{\partial z} \right|_{z=H_{\text{gap}}[\psi]} = 0. \quad (8)$$

Для решения данной задачи нами был использован итеративный подход: по известной функции $H_{\text{gap}}^{(i)}$ вычислялся потенциал $\psi^{(i)}$ такой, что было выполнено условие (7), а далее, используя полученный потенциал, пересчитывалась высота зазора. Таким образом, выполнялась следующая итеративная процедура ($0 < w < 1$ — некоторый вес, улучшающий сходимость схемы):

$$\begin{aligned} & H_{\text{gap}}^{(i)} \rightarrow \psi^{(i)}, \\ & H_{\text{gap}}^{(i+1)} = w H_{\text{gap}}[\psi^{(i)}] + (1 - w) H_{\text{gap}}^{(i)}. \end{aligned} \quad (9)$$

При этом на каждом шаге итеративной схемы (9) необходимо было не только определять высоту зазора $H_{\text{gap}}[\psi]$, но и решать уравнение Пуассона (4) с граничными условиями (5), (6), (7), последнее из которых поставлено на границе, меняющейся в ходе итеративного процесса.

3 Определение ускоряющего потенциала

3.1 Изгибное излучение

Для определения высоты вакуумного зазора необходимо рассмотреть процесс поглощения первичных фотонов в сверхсильном магнитном поле и, соответственно, сам механизм генерации фотонов. В классической модели Рудермана-Сазерленда источником первичных фотонов считается изгибное излучение первичных частиц, и высота зазора H_{gap} определяется следующим выражением:

$$H_{\text{gap}}(r_m, \phi_m) = \min_{l_e} (l_e + l_\gamma(l_e)), \quad (10)$$

где l_e — расстояние, пройденное первичной частицей до испускания изгибного фотона, а $l_\gamma(l_e)$ — длина свободного пробега фотона в сверхсильном магнитном поле. Важной особенностью изгибного излучения является то, что в данном процессе с ростом энергии излучающей частицы растет как число испускаемых фотонов, так и их характерная энергия. В связи с этим можно полагать, что первичный фотон может быть излучен в произвольной точке траектории частицы, что позволяет считать величину l_e произвольной. Также данное обстоятельство оправдывает и формальное разделение области ускорения частиц на вакуумную и заэкранированную, так как переходная область оказывается достаточно узкой.

Далее, для длины свободного пробега фотона (нормированной на радиус полярной шапки) с энергией ϵ_γ , движущегося в магнитном поле нейтронной звезды B , имеем следующее выражение (Sturrock, 1971; Ruderman and Sutherland, 1975):

$$l_\gamma \approx \frac{8}{3} \frac{1}{\Lambda} \frac{B_{\text{cr}}}{B} \frac{R_c(r_m, z)}{\epsilon_\gamma(l_e)}. \quad (11)$$

Здесь и далее все значения энергии нормированы на $m_e c^2$, $B_{\text{cr}} = m_e^2 c^3 / \hbar e \approx 4.4 \cdot 10^{13}$ Гс — швингеровское магнитное поле, $R_c(r_m, z) \approx (4/3) R^2 / r_m$ — радиус кривизны магнитных силовых линий, а $\Lambda = \Lambda_0 - 3 \ln \Lambda_0$, где

$$\Lambda_0 = \ln \left[\frac{e^2}{\hbar c} \frac{\omega_B R_c}{c} \left(\frac{B_{\text{cr}}}{B} \right)^2 \epsilon_\gamma^{-2} \right] \sim 20 \quad (12)$$

есть безразмерный параметр, слабо (логарифмически) зависящий от параметров пульсара и энергии фотона (Beskin and Litvinov, 2022).

Наконец, метод вычисления высоты вакуумного зазора в рамках модели Рудермана-Сазерленда предполагает использование моноэнергетического приближения для спектра изгибного излучения

$$\epsilon_\gamma = \epsilon_c = \frac{3 \lambda_e \gamma_e^3(l_e)}{2 R_c(r_m, z)}, \quad (13)$$

где $\lambda_e = \hbar / m_e c$ — приведенная комптоновская длина волны, а γ_e есть гамма-фактор первичной частицы. Стоит отметить, что хотя длина свободного пробега фотона (11) явным образом зависит от его энергии и данное приближение может показаться довольно грубым, в разделе 3.4 будет показано, что зависимость итогового ускоряющего

потенциала от выбора численного коэффициента в формуле (13) оказывается достаточно слабой.

Последним уравнением, необходимым для определения высоты зазора является связь гамма-фактора первичной частицы γ_e и длины ее пробега l_e . Ее несложно получить из соответствующего уравнения движения

$$mc^2 \frac{d\gamma_e}{dl} = eE_{\parallel} - F_{\text{CR}} - F_{\text{IC}}. \quad (14)$$

Здесь $E_{\parallel} = d\psi/dl$ — ускоряющее электрическое поле в зазоре, а последние два слагаемых соответствуют потерям на изгибное излучение и обратное комптоновское рассеяние. Вклад F_{CR} , однако, становится существенным лишь при $\gamma \sim 10^8$, что позволяет пренебречь им для большинства пульсаров. Вывод же о малости вклада комптоновского рассеяния можно сделать из сравнения длин свободного пробега первичных частиц, выполненного ниже в следующем подразделе 3.2. Таким образом, в большинстве случаев γ -фактор первичной частицы можно определять, не решая полное дифференциальное уравнение (14), а используя его решение в отсутствие потерь:

$$\gamma_e(l) = \frac{e\psi(l)}{mc^2}. \quad (15)$$

Стоит отметить, что при вычислении высоты зазора, выражение (15) может быть применено и для пульсаров с более высокими гамма-факторами первичных частиц (например, для миллисекундных пульсаров). Действительно, в вакуумной области потери на изгибное излучение должны быть достаточно малы, ведь в противном случае появился бы избыток высокоэнергетичных фотонов, способных родить электрон-позитронные пары. Таким образом, потери на изгибное излучение могут быть существенны только в уже заэкранированной области, которая будет рассматриваться при исследовании рождения вторичной электрон-позитронной плазмы в разделе 4. В данной области уравнение (14) можно уже решить оставив только слагаемое F_{CR} , получив:

$$\gamma(l_e) = \frac{\gamma_{\text{max}}}{\sqrt[3]{1 + 2 \frac{r_e R_0}{R_c^2} l_e \gamma_{\text{max}}^3}}, \quad (16)$$

где r_e — классический радиус электрона, а γ_{max} — гамма-фактор первичной частицы на границе вакуумного зазора.

3.2 Обратное комптоновское рассеяние

Хотя во многих классических работах изгибное излучение и рассматривалось как основной источник первичных фотонов, существует ряд работ (Hibschman and Arons, 2001b; Zhang et al., 1997), демонстрирующих, что для широкого диапазона параметров пульсаров ключевым механизмом, определяющим высоту зазора, может быть обратное комптоновское рассеяние (как нерезонансное, так и резонансное) тепловых фотонов на ультрарелятивистских первичных частицах. Ключевым отличием данного процесса от изгибного излучения является то, что с ростом энергии первичной частицы характерная

энергия комптоновских фотонов растет, в то время как темп их рождения падает. Вследствие этого первичные частицы, обладающие энергией, достаточной, чтобы произвести γ -квант с необходимой для рождения пары энергией, могут иметь пренебрежимо малую вероятность испытать рассеяние. Фактически это означает, что необходимо явно учитывать конечность длины свободного пробега частицы, ограничивающую величину l_e в выражении (10) снизу. Здесь необходимо отметить, что в случае доминирования вклада обратного комптоновского рассеяния это обстоятельство делает саму концепцию вакуумного зазора плохо применимой. Действительно, в таком случае граница перехода из незаэкранированной в заэкранированную область должна быть существенно размыта. Тем не менее, данной моделью можно воспользоваться как нулевым приближением.

Проанализировав зависимость данной величины от энергии, можно оценить влияние обратного комптоновского рассеяния на рассматриваемый процесс. Считая спектр излучения фотонов тепловым и изотропным в диапазоне $\mu_{\min} \leq \mu \leq 1$ (μ — косинус угла столкновения), можно записать следующее выражение для частоты актов рассеяния (Blumenthal and Gould, 1970)

$$R(\gamma_e) = \int_0^{+\infty} d\epsilon \int_{\mu_{\min}}^1 d\mu \frac{c}{4\pi^3 \lambda_e^3} \frac{\epsilon^2}{e^{\epsilon/T} - 1} \cdot (1 - \beta\mu) \sigma_{\text{tot}}(\gamma, \epsilon'(\epsilon, \mu)). \quad (17)$$

В данном выражении ϵ — энергия фотона до столкновения в системе отсчета пульсара (в единицах $m_e c^2$), ϵ' — энергия фотона в системе отсчета покоя электрона, σ_{tot} — полное сечение рассеяния.

Так как электрон практически мгновенно разгоняется до γ -факторов $\gamma \gtrsim 10^5$, для нерезонансных фотонов необходимо использовать релятивистское сечение Клейна-Нишины. В то же время, так как циклотронный резонанс находится при энергиях $\epsilon' = \epsilon_B = B/B_{\text{cr}} \ll 1$, в нерезонансном случае можно не учитывать влияние магнитного поля и воспользоваться следующим выражением для сечения рассеяния (σ_T — томпсоновское сечение) (Berestetsky et al., 1971)

$$\sigma_{\text{NR}} = \frac{3\sigma_T}{8} \frac{1}{\epsilon'} \left[\left(1 - \frac{2}{\epsilon'} - \frac{2}{\epsilon'^2} \right) \ln(1 + 2\epsilon') + \frac{1}{2} + \frac{4}{\epsilon'} - \frac{1}{2(1 + 2\epsilon')^2} \right]. \quad (18)$$

По этой же причине резонансное рассеяние можно рассматривать в томпсоновском пределе (уже учитывая наличие магнитного поля). В нем сечение рассеяния имеет вид (Herold, 1979)

$$\sigma = \frac{\sigma_T}{2} \left[\frac{u^2}{(u+1)^2} + \frac{u^2}{(u-1)^2 + a^2} \right]. \quad (19)$$

Здесь $u = \epsilon'/\epsilon_B$, $a = 2\alpha/3\epsilon_B$, а $\epsilon_B = B/B_{\text{cr}}$. Выделив в данном выражении резонансную часть, можно записать

$$\sigma_R = \frac{3\pi}{4\alpha_e} \sigma_T \delta(\epsilon' - \epsilon_B). \quad (20)$$

Для наших целей достаточно исследовать зависимость длины свободного пробега электрона от энергии, не рассматривая процесс ускорения электрона непосредственно, то есть считая, что $l_e(\gamma_e) = c/R(\gamma_e)$. Для нерезонансного рассеяния расчеты выполнялись численно, используя выражения (17), (18), в то время как для резонансного случая

можно получить аналитическое выражение (Dermer, 1990)

$$l_e^R = \frac{\lambda_e \gamma_e^2}{\epsilon_B^2 \Theta \alpha_e (-\ln(1 - e^{-w}))}, \quad (21)$$

где $\Theta = T/m_e c^2$, а

$$w = \frac{\epsilon_B}{\gamma_e \Theta (1 - \beta \mu_{\min})}. \quad (22)$$

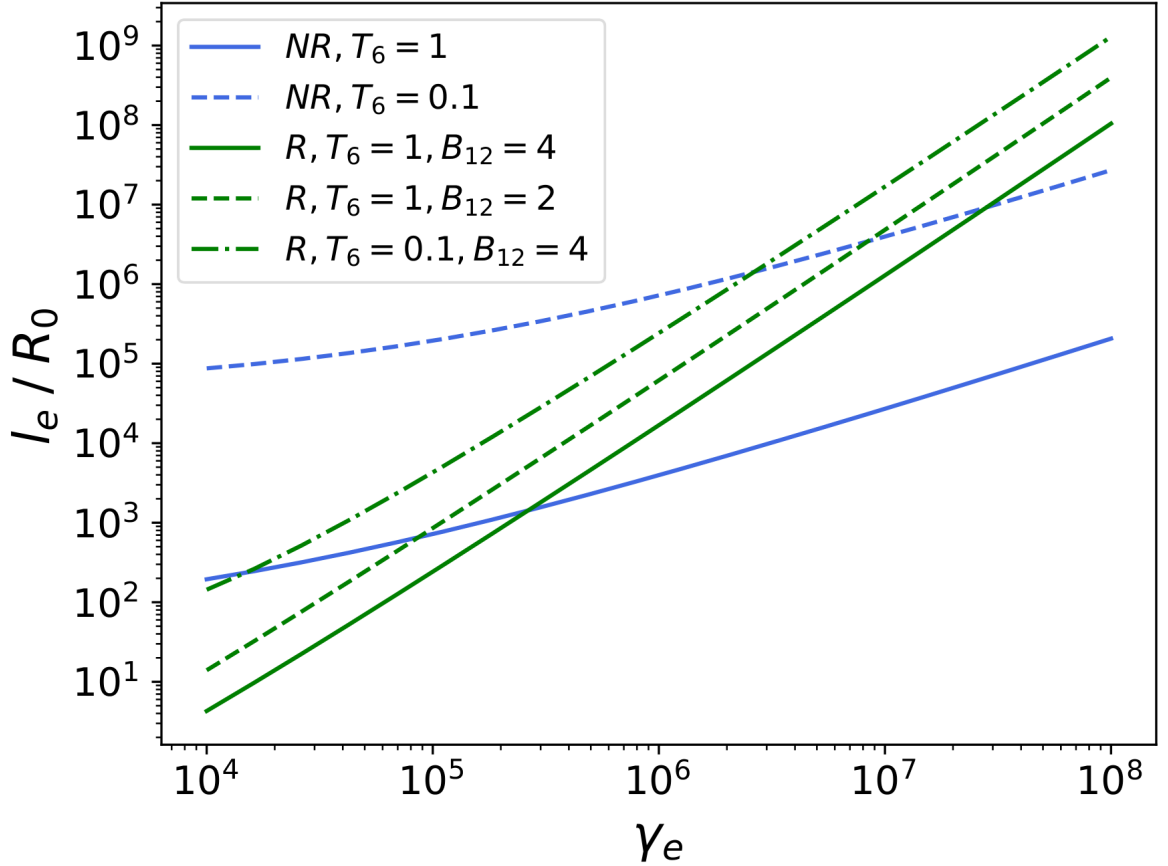


Рис. 1: Зависимость длин свободного пробега электрона от его γ -фактора для различных параметров пульсара. Зеленый цвет (три параллельные линии) соответствует резонансному рассеянию (R), синий (две пологие кривые) — нерезонансному (NR).

Интересно сравнить полученные длины пробега с радиусом полярной шапки, являющимся характерным масштабом высоты зазора в случае преобладания изгибного механизма генерации первичных фотонов. Результаты вычислений представлены на Рис. 1. Как можно видеть, даже при температуре 10^6 К длина свободного пробега в нерезонансном случае имеет порядок радиуса полярной шапки только при $\gamma \lesssim 10^2$, что позволяет не учитывать его при вычислении ускоряющего потенциала. В резонансном случае ответ уже не столь однозначен, так как при $\gamma \sim 10^4$ энергии рассеянных фотонов могут быть достаточны для рождения пары вблизи звезды. Однако, как показали результаты численных расчетов, в пределах наблюдаемых параметров ортогональных пульсаров данным процессом также можно пренебречь.

3.3 Решение уравнения Пуассона

3.3.1 Полу-аналитический метод

Аналогично работе [Beskin and Litvinov \(2022\)](#), можно попробовать построить решение в виде бесконечного ряда, используя, однако, граничные условия [\(5\)](#), [\(6\)](#), [\(7\)](#). Несложно показать, что общее решение уравнения [\(4\)](#), удовлетворяющее условиям [\(5\)](#), [\(6\)](#), можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{K_\psi}{2} \frac{\Omega B_0 R_0^2}{c} \left[1 - r_m^2 - \sum_i a_i^{(0)} e^{-\lambda_i^{(0)} z} J_0 \left(\lambda_i^{(0)} r_m \right) - \sum_i b_i^{(0)} e^{\lambda_i^{(0)} z} J_0 \left(\lambda_i^{(0)} r_m \right) \right] \cos \chi + \\ & + \frac{3K_\psi}{8} \frac{\Omega B_0 R_0^2}{c} \frac{R_0}{R} \left[r_m - r_m^3 - \sum_i a_i^{(1)} e^{-\lambda_i^{(1)} z} J_1 \left(\lambda_i^{(1)} r_m \right) - \sum_i b_i^{(1)} e^{\lambda_i^{(1)} z} J_1 \left(\lambda_i^{(1)} r_m \right) \right] \sin \chi \sin \varphi_m. \end{aligned} \quad (23)$$

В данном выражении $\lambda_i^{(0)}$ и $\lambda_i^{(1)}$ - нули соответствующих функций Бесселя, коэффициенты $a_i^{(0,1)}$ и $b_i^{(0,1)}$ удовлетворяют условиям

$$a_i^{(0)} + b_i^{(0)} = c_i^{(0)}, \quad a_i^{(1)} + b_i^{(1)} = c_i^{(1)}, \quad (24)$$

а для коэффициентов $c_i^{(0,1)}$ должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} \sum_i c_i^{(0)} J_0 \left(\lambda_i^{(0)} x \right) &= 1 - x^2 \\ \sum_i c_i^{(1)} J_1 \left(\lambda_i^{(1)} x \right) &= x - x^3. \end{aligned} \quad (25)$$

Последним уравнением, замыкающим систему и определяющим коэффициенты a_i и b_i , является условие [\(7\)](#) переписывающееся в виде соотношения:

$$\begin{aligned} & \sum_i \lambda_i^{(0)} \left(a_i^{(0)} e^{-\lambda_i^{(0)} H_{RS}} - b_i^{(0)} e^{\lambda_i^{(0)} H_{RS}} \right) J_0 \left(\lambda_i^{(0)} x \right) \cos \chi \\ & + \sum_i \lambda_i^{(1)} \left(a_i^{(1)} e^{-\lambda_i^{(1)} H_{RS}} - b_i^{(1)} e^{\lambda_i^{(1)} H_{RS}} \right) J_1 \left(\lambda_i^{(1)} x \right) \\ & \times \frac{3}{4} \frac{R_0}{R} \sin \chi \sin \varphi_m = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Далее, ограничив число членов ряда некоторым конечным N , можно выбрать $2N$ точек на полярной шапке и получить полную систему линейных уравнений на коэффициенты $a_i^{(0,1)}$, $b_i^{(0,1)}$. Здесь, однако, кроется существенная трудность. В силу наличия экспоненциальных факторов $e^{\lambda_i^{(0,1)} H_{\text{gap}}}$, $e^{-\lambda_i^{(0,1)} H_{\text{gap}}}$, при больших высотах зазора (ожидающихся в центре и на границах полярной шапки), система линейных уравнений становится крайне плохо обусловленной, и ее точное решение оказывается невозможным. Тем самым, данный метод оказался не подходящим для решения задачи в интересующем нас диапазоне параметров пульсаров. Тем не менее, реализация данного метода предоставила дополнительный способ верификации дальнейших результатов.

3.3.2 Метод PINN (Physics Informed Neural Networks)

Альтернативой описанному выше полу-аналитическому способу решения уравнения [\(4\)](#) являются полностью численные методы. Однако, традиционные сеточные методы также плохо подходят для данной задачи в силу переменности и сложности формы трехмерной расчетной области.

В связи с этим для решения данного уравнения в частных производных был применен метод Physics-Informed Neural Networks (PINN) основанный на использовании нейронных сетей. PINN является достаточно новой альтернативой традиционным методам решения уравнений в частных производных и в настоящее время все чаще и чаще применяется во множестве областей физики и астрофизики, таких, например, как космология (Chantada et al., 2023), теория переноса излучения (Mishra and Molinaro, 2021) и теория магнитосферы радиопульсаров (Stefanou et al., 2023; Dimitropoulos et al., 2024).

PINN являются нейронной сетью той или иной архитектуры (как правило, выбирается полносвязная нейронная сеть), входными параметрами которой являются независимые переменные $\mathbf{x}$, а выходным — значение функции $\mathcal{N}(\mathbf{x})$, приближенно удовлетворяющей уравнению $\hat{L}[\mathcal{N}(\mathbf{x})] = 0$, где $\hat{L}$ есть некоторый дифференциальный оператор вида:

$$\hat{L} = \sum_{i=0}^N \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \cdot \left(\frac{d}{d\mathbf{x}} \right)^i. \quad (27)$$

Отметим, что слагаемое $i = 0$ соответствует некоторому произвольному источнику. Для обучения нейронной сети в качестве loss-функции выбирается норма невязки дифференциального уравнения: $||\hat{L}[\mathcal{N}(\mathbf{x})]|| \rightarrow 0$. При этом для вычисления производных искомой функции не нужно вводить дискретизацию пространства, так как их можно получить непосредственно в процессе обратного прохождение по нейронной сети. Таким образом, в процессе обучения нейронная сеть будет приближаться к одному из решений соответствующего дифференциального уравнения. Что же касается граничных условий, то наиболее простым способом их учета является добавление соответствующих слагаемых в loss-функцию с некоторыми весами (Δ_{BC}^i - невязка граничных условий):

$$\mathcal{L}_{loss} = \mathcal{L}_{PDE} + \mathcal{L}_{BC} = ||\hat{L}[\mathcal{N}(\mathbf{x})]||^2 + \sum_i w_i ||\Delta_{BC}^i||^2. \quad (28)$$

Проблемой данного подхода является, однако, необходимость балансировки весов для достижения минимизации всех слагаемых по отдельности.

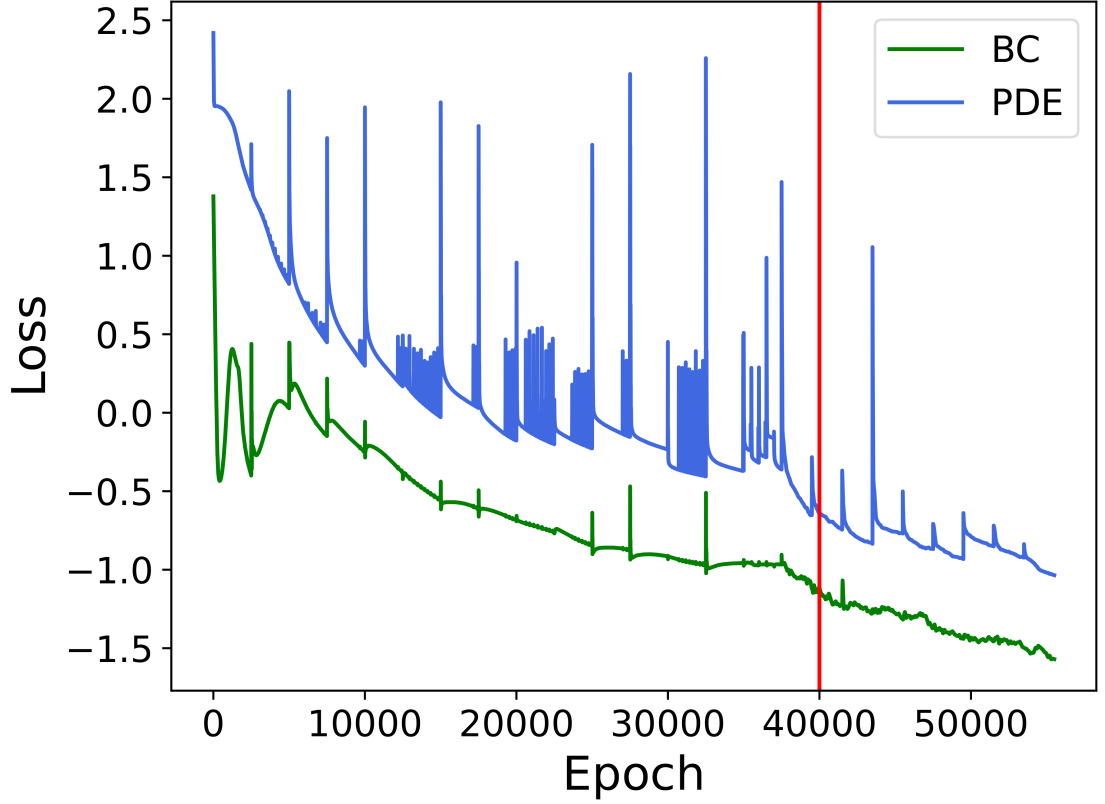


Рис. 2: Пример поведения функции ошибок. Скачки соответствуют смене граничных условий и выбору нового набора точек для обучения. Вертикальной красной линией отмечен момент переключения оптимизатора с ADAM на LBFG-S.

Другой способ заключается в выполнении некоторого алгебраического преобразования с выходными данными нейронной сети так, чтобы ответ автоматически удовлетворял граничным условиям. Например, жесткого выполнения условий Дирихле на фиксированной границе ∂D области D можно достичь, введя функции f и g такие, что $f|_{\mathbf{x} \in \partial D} = 0$, а $g|_{\mathbf{x} \in \partial D} = h_{BC}$, где h_{BC} задает значения искомой функции на границе. Тогда функция $g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})\mathcal{N}(\mathbf{x})$ будет удовлетворять граничным условиям независимо от вида функции $\mathcal{N}(\mathbf{x})$.

Основными преимуществами данного подхода по сравнению с традиционными численными методами являются отсутствие расчетной сетки и, как следствие, большее удобство при работе в областях со сложной и переменной геометрией, а также меньшая чувствительность к размерности задачи. Недостатком данного метода как правило является меньшая точность результатов при больших вычислительных затратах.

Важно также отметить, что в отличие от большинства других численных методов, предел точности которых при неограниченном времени расчетов приближается к машинному эпсилон, предел точности PINN определяется архитектурой нейронной сети и способом оптимизации. Тем не менее для многих астрофизических задач (в том числе и для рассматриваемой в данной работе) точность результатов в первую очередь определяется физической моделью, а не выбором численного метода. В таких случаях способность PINN решать уравнения со сложными граничными условиями выходит на

первый план.

В применении к рассматриваемой задаче данный метод использовался следующим образом. При фиксированной высоте вакуумного зазора делается $N \sim 5000$ шагов оптимизации; далее, используя текущий вид потенциала, высота зазора пересчитывается и делаются следующие N шагов оптимизации. При этом веса нейронной сети, полученные на текущей итерации, используются как начальные значения весов на следующей. Процедура повторяется до тех пор, пока относительное изменение высоты зазора не станет меньше 1%. После этого происходит дополнительное обучение нейронной сети при фиксированной высоте зазора.

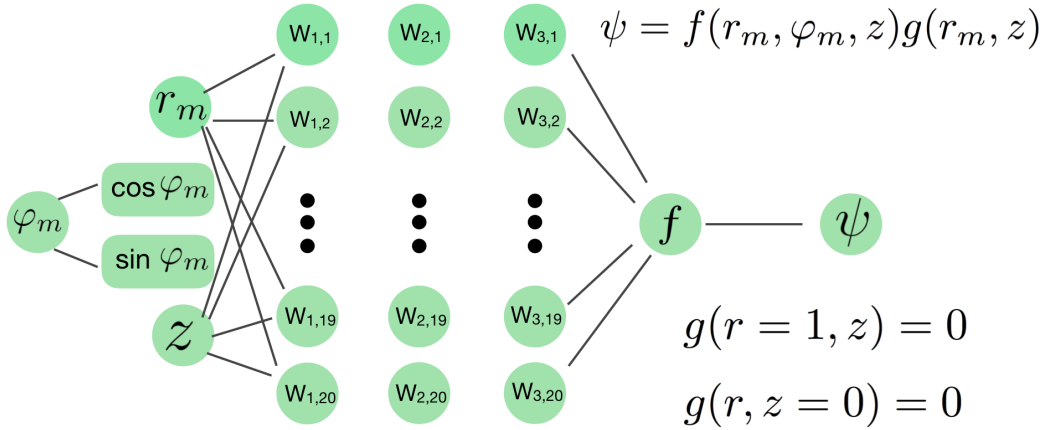
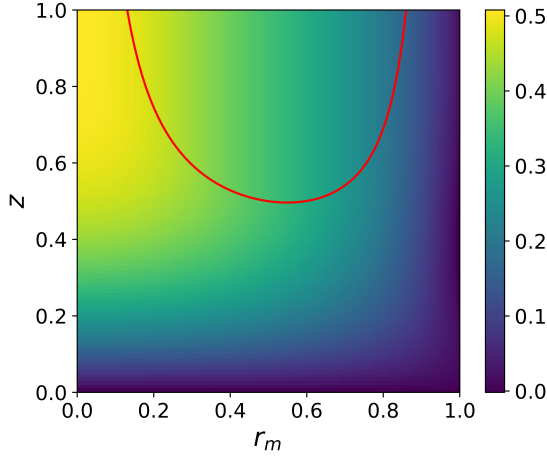
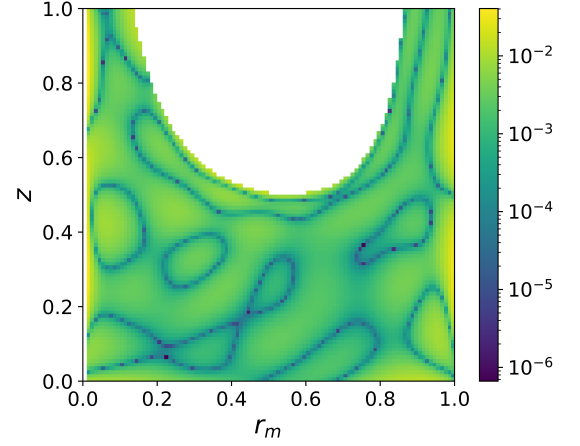


Рис. 3: Архитектура нейронной сети, использовавшейся для вычисления ускоряющего потенциала

В качестве нейронной сети была выбрана полносвязная сеть, состоящая из 3-х промежуточных слоев (20, 20, 20) (см. рис. 3). Для учета граничных условий на поверхностях $r_m = 1$ и $z = 0$ результат вычислений нейронной сети домножался на функцию $f(r_m, z) = r_m \cdot z$, в то время как граничное условие на верхней границе зазора учитывалось введением дополнительного слагаемого в функцию ошибок. Для оптимизации использовался подход, предложенный в работе Markidis (2021), заключающийся в первичном обучении с помощью алгоритма ADAM (Kingma and Ba, 2014) и последующего обучения методом LBFG-S (см. Рис. 2). В то время как метод ADAM применялся непосредственно в итеративном процессе, метод LBFG-S использовался при дообучении с финальной высотой зазора. Данный подход мотивирован тем, что метод ADAM в значительно меньшей степени подвержен проблеме локальных минимумов, особенно актуальной на начальных этапах обучения, в то время как метод LBFG-S позволяет достичь более глубокой оптимизации. Таким образом используются сильные и нивелируются слабые стороны обоих методов, что позволило достичь заметно большей точности расчетов в рассматриваемой задаче.



(a) Потенциал, нормированный на величину $\Omega BR_0^2/(2c)$. Красная линия соответствует высоте зазора $H_{\text{gap}}(r_m)$.



(b) Норма невязки решения уравнения Пуассона.

Рис. 4: Пример вычисления ускоряющего потенциала для пульсара с $\chi = 10^\circ$, $B_{12} = 1.6$ и $P = 0.5$ с.

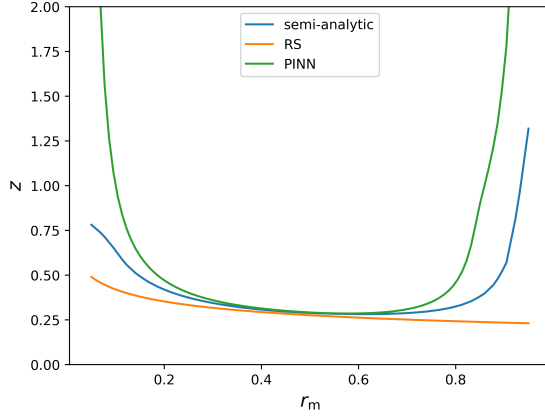
3.4 Осесимметричный случай

При углах наклона осей $\chi \lesssim 85^\circ$ источник в уравнении (4) фактически не зависит от угла φ_m . Поэтому для пульсаров, не являющихся ортогональными, задача становится осесимметричной и соответственно двумерной, что позволяет исключить из рассмотрения угол φ_m . Это в значительной степени упрощает как расчет, так и анализ результатов. В связи с этим, хотя основным фокусом работы и является применение вышеизложенного метода к ортогональным пульсарам, в первую очередь был рассмотрен именно осесимметричный случай.

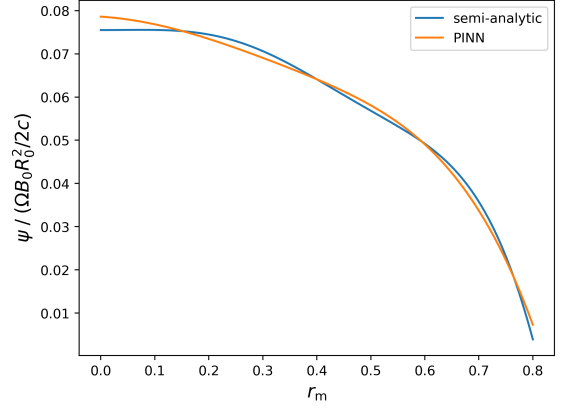
Как показано на Рис. 4, описанный выше метод позволяет найти решение поставленной задачи с относительной невязкой порядка нескольких процентов, что является достаточно хорошей точностью. При этом геометрически полученные результаты воспроизводят некоторые свойства структуры, известной как “slot-gap” (Arons, 1983). Стоит однако отметить, что в работе Arons (1983) рассматривалась стационарная модель со свободным выходом, когда плотности заряда ρ_e и ρ_{GJ} , входящие в уравнение (2), мало отличаются друг от друга.

Однако в обоих случаях такая форма высоты зазора обусловлена тем, что вблизи магнитной оси рождение частиц затруднено вследствие малой кривизны магнитного поля, а на краю полярной шапки ускоряющий потенциал стремится к нулю. Таким образом высота зазора должна обращаться в бесконечность при $r_m \sim 0$ и $r_m \sim 1$.

Также, для осесимметричного случая было произведено сравнение с методом, описанным в главе 3.3.1. Как можно видеть на Рис. 5, оба метода дают схожие результаты при малых высотах зазора, однако метод PINN позволяет корректно провести вычисления и для больших высот.



(a) Высоты вакуумного зазора. Также приведена стандартная формула высоты зазора Рудермана-Сазерленда (Ruderman and Sutherland, 1975)



(b) Ускоряющий потенциал на достаточно малой высоте $z = 0.1$

Рис. 5: Сравнение результатов, полученных двумя методами решения уравнения Пуассона

Также на рисунке 6 представлены предельные значения ускоряющего потенциала (достигаемые на высоте вакуумного зазора), вычисленные с использованием различных характерных энергий в моноэнергетическом приближении синхротронного спектра (13). Как можно видеть, даже при изменении характерной энергии фотона в два раза, относительное изменение потенциала не превышает $\sim (15 - 20)\%$, что является допустимой погрешностью в рамках данной работы. Тем не менее, в ходе дальнейшего развития модели, влияние изгибного спектра предполагается учесть.

3.5 Неосесимметричный случай

На Рис. 7 показаны примеры расчета ускоряющего потенциала для ортогональных пульсаров с углами наклона $\chi = 88^\circ$ (верхний ряд) и $\chi = 89.3^\circ$ (нижний ряд) для магнитного поля $B_{12} = 1.5$ и периода $P = 0.3$ с, характерного для интеримпульсных ортогональных пульсаров. Приведены максимальные значения потенциала над полярной шапкой, срезы нормы невязки уравнения Пуассона на высоте $0.5R_0$, а также высоты вакуумных зазоров в радиусах полярной шапки. Стоит отметить, что высота $H_{\text{gap}} = 10R_0$ соответствует верхней границе вычислительной области, конкретное положение которой, однако, не влияет на итоговый результат вычисления ускоряющего потенциала (при условии, что она расположена достаточно высоко).

Как уже отмечалось, исследование таких пульсаров представляет особый интерес, поскольку для них электрический потенциал становится существенно неосесимметричным. Более того, в этом случае гольдрайховская плотность может менять знак в пределах полярной шапки, что влечет за собой и изменение направления ускоряющего поля. Происходит это, однако, в весьма узком диапазоне углов χ .

Действительно, для того, чтобы величина $\cos \theta_b$ при характерных значениях $P \approx 1$

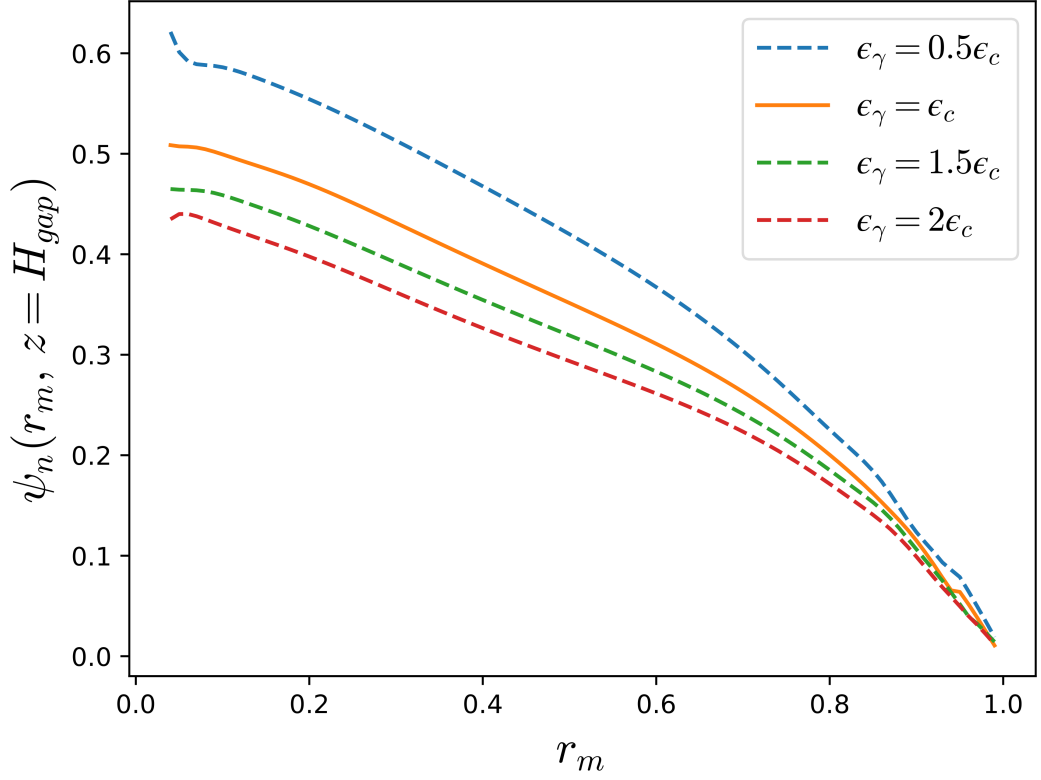
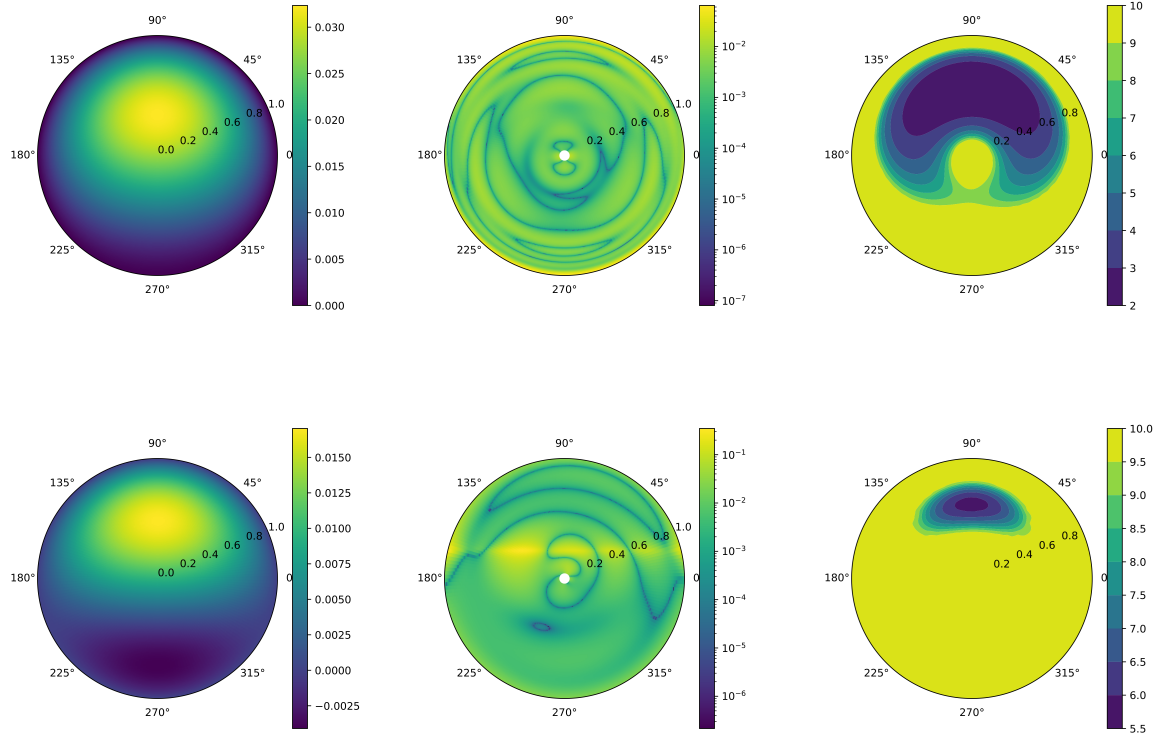


Рис. 6: Профили предельного ускоряющего потенциала, вычисленные с использованием различных характерных энергий изгибного излучения для пульсара с $\chi = 10^\circ$, $B_{12} = 1.6$ и $P = 0.5$ с. Потенциал нормирован на величину $\Omega B R_0^2 / 2c$.

с поменяла знак в пределах полярной шапки, необходимо, чтобы $|\chi - \pi/2| \lesssim 3R_0/2R \sim 0.03$, то есть $88.5^\circ \lesssim \chi \lesssim 91.5^\circ$. В результате, как показано на Рис. 7, смена знака потенциала имеет место лишь для угла $\chi = 89.3^\circ$; для угла $\chi = 88^\circ$ знак потенциала не изменяется по всей поверхности полярной шапки.

Отметим наконец, что, как можно видеть из Рис. 7, значения ускоряющего потенциала оказываются заметно меньше, чем для неортогональных пульсаров. Это напрямую связано с малостью фактора $\cos \theta_b$ в гольдрайховской плотности (3), которая в свою очередь является источником в соответствующем уравнении Пуассона (4).



(а) Ускоряющий потенциал, нормированный на величину $\Omega BR_0^2/2c$, (б) Относительная невязка решения (с) Высота вакуумного зазора в радиусах полярной шапки

Рис. 7: Примеры расчета ускоряющего потенциала для ортогональных пульсаров с $B_{12} = 1.5$, $P = 0.3$ с, $\chi = 88^\circ$ для верхнего ряда и $\chi = 89.3^\circ$ — для нижнего. Приведены максимальные значения потенциала над полярной шапкой, нормы невязки уравнения Пуассона на высоте $0.5R_0$, а также высоты вакуумных зазоров, нормированные на радиус полярной шапки.

4 Профиль плотности вторичной плазмы

4.1 Метод расчета

4.1.1 Полная плотность

Для изучения распределения плотности плазмы в пространстве удобно записать концентрацию в следующем виде: $n = g(r_m, \varphi_m) \lambda n_{\text{GJ}}$, где $n_{\text{GJ}} = |\rho_{\text{GJ}}|/e$ — гольдрайховская концентрация, а λ — параметр множественности, определяемый усреднением величины n/n_{GJ} по полярной шапке. Такой вид записи мотивирован тем, что вдали от области генерации частиц функция $g(r_m, \varphi_m)$ является постоянной на силовых линиях магнитного поля, то есть вся зависимость от высоты над полярной шапкой содержится в выражении для гольдрайховской плотности n_{GJ} . Действительно, пренебрегая дрейфом (существенным только на масштабах светового цилиндра), в стационарном случае мы можем написать уравнение непрерывности в следующем виде:

$$\nabla \cdot (n\mathbf{v}) = \nabla \cdot (g\lambda n_{\text{GJ}}v_0\mathbf{B}/B) = 0 \quad (29)$$

Учитывая соленоидальность магнитного поля и отсутствие ускорения частиц в интересующей нас области, получим:

$$\lambda v_0 \mathbf{B} \cdot \nabla (g n_{\text{GJ}}/B) = 0 \quad (30)$$

Вспоминая, что $n_{\text{GJ}} \propto B$, получаем искомое соотношение: $\mathbf{B} \cdot \nabla g = 0$, что и означает постоянство данной функции на силовых линиях.

Данное рассуждение требует, однако, некоторой модификации при рассмотрении ортогональных пульсаров, так как для них сама величина n_{GJ} существенно зависит от координат r_m, φ_m . Вследствие этого, в качестве нормировки для таких объектов была выбрана величина

$$n_0 = \frac{\Omega B}{2\pi c e} \sqrt{\frac{\Omega R}{c}}, \quad (31)$$

где последний множитель соответствует характерной величине $\cos \theta_b$ на полярной шапке для ортогональных пульсаров. Таким образом, безразмерная величина λ характеризует эффективность генерации плазмы, а функция $g(r_m, \phi_m)$ определяет ее пространственное распределение.

Для расчета множественности плазмы использовалась следующая модель: первичные частицы, ускоренные в определенном в первой части работы потенциале $\psi(r_m, \varphi_m, z)$ до значений лоренц-факторов $\gamma_e \sim 10^7$, рождают первичные фотоны, которые, в свою очередь, поглощаясь в магнитном поле, дают начало синхротронному каскаду рождения пар (Beskin et al., 2023; Hirschman and Arons, 2001a). Учитывая, что длины свободного пробега фотонов много меньше масштаба изменения магнитного поля звезды, синхротронный каскад можно считать локальным в пространстве. Более того, время синхротронного высвечивания $\tau_s \sim 10^{-15}$ с оказывается много меньше характерных времен движения частиц в магнитосфере, что позволяет считать синхротронный каскад также локальным и во времени. Тогда, в рамках такой модели получаем следующее

выражение для количества вторичных частиц, рожденных одной первичной частицей

$$\lambda_1 = \int_0^\infty dz \int_{\epsilon_{\min}}^\infty d\epsilon_i n_\gamma(z, \epsilon_i; r_m, \varphi_m) f_{\text{SR}}(z, \epsilon_i; r_m). \quad (32)$$

Здесь z есть высота излучения первичного фотона, а n_γ — соответствующий спектр. Наконец, функция f_{SR} определяет число вторичных частиц, рожденных одним фотоном с энергией ϵ_i . Для ее определения мы воспользуемся подходом, предложенным в работе [Hibschman and Arons \(2001a\)](#), однако в данной работе вычисления будут проводиться с учетом зависимости всех величин от координат на полярной шапке.

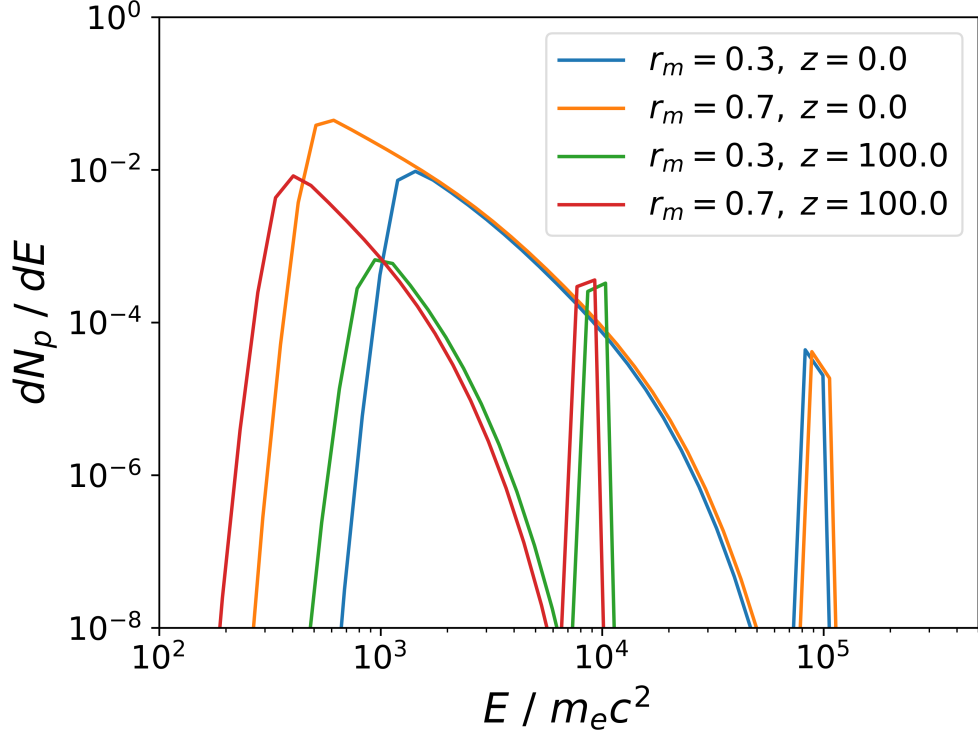


Рис. 8: Спектр синхротронного каскада, запущенного фотоном с энергией $\epsilon_\gamma = 10^6$ для различных значений r_m и z .

4.1.2 Синхротронный каскад

Для вычисления множественности синхротронного каскада необходимо детальнее рассмотреть процесс поглощения фотонов в магнитном поле. Вероятность однофотонного рождения пары в магнитном поле определяется следующим выражением ([Erber, 1966](#)):

$$\alpha_B(\epsilon, \psi) = 0.23 \frac{\alpha_e}{\lambda_C} \frac{B}{B_{\text{cr}}} \sin \psi \exp \left(-\frac{8}{3\epsilon \sin \psi} \frac{B_{\text{cr}}}{B} \right), \quad (33)$$

где α_e - постоянная тонкой структуры, ϵ - энергия фотона, нормированная на $m_e c^2$, а ψ - угол между волновым вектором фотона и внешним магнитным полем. Фактически, данное выражение определяет оптическую толщину для высокоэнергетических фотонов,двигающихся в магнитосфере. Для определения полной вероятности поглощения, необходимо определить зависимость угла ψ от расстояния пройденного фотоном. В силу

того, что фотоны излучаются ультрарелятивистскими частицами, с хорошей точностью можно считать их рождающимися под нулевым углом к магнитному полю. Тогда, в дипольной геометрии можно получить следующее выражение для угла ψ :

$$\psi = \psi_\infty \left(1 - \frac{R_e}{R}\right), \quad (34)$$

где $\psi_\infty = R_e/\rho_c$, а R_e и R - расстояния от центра звезды до точки излучения и рассматриваемой точки, соответственно. Теперь можно найти длину свободного пробега излученного фотона, то есть угол ψ_a , при котором произойдет рождение электрон-позитронной пары. С хорошей точностью этот момент будет соответствовать оптической толще порядка $\tau = 1$. Далее, выразив все величины, как функции угла ψ , можно прийти к следующему выражению для оптической толщи:

$$\tau(\psi) = 0.23 \frac{\alpha_e R_c}{\lambda_c} \epsilon_B \psi_\infty^2 \int_0^{\psi/\psi_\infty} t(1-t)^{5/2} \times \exp \left[-\frac{8}{3} \frac{1}{\epsilon_B \epsilon_\gamma \psi_\infty t(1-t)^3} \right] dt. \quad (35)$$

Считая полную оптическую толщу $\tau(\psi_\infty)$ много большей 1, в интересующем нас случае $\tau \sim 1$, интеграл можно взять приближенно и получить следующее уравнение на величину $t_a = \psi_a/\psi_\infty$:

$$t_a(1-t_a)^3 = \frac{8}{3} \frac{1}{\epsilon_B \epsilon_\gamma \psi_\infty \ln \Lambda}. \quad (36)$$

В данном уравнении полагается $t_a < 1/4$. В пределе $t_a \ll 1$, то есть для высокоэнергетичных фотонов, мы получим выражение, эквивалентное формуле (11), уже использовавшейся ранее. Тем не менее, в дальнейшем нам также пригодится и полный вид уравнения (36).

Уравнение (36) также позволяет с хорошей точностью оценить минимальную энергию фотона, необходимую для рождения электрон-позитронной пары в магнитосфере пульсара. Выражение $t_a(1-t_a)^3$ достигает своего максимума при $t_a = t_{min} = 1/4$, что дает соответствующую пороговую энергию фотона:

$$\epsilon_{min} = \frac{2^{11}}{3^4} \frac{1}{\epsilon_B \psi_\infty \ln \Lambda} \quad (37)$$

Пусть фотон с энергией ϵ_i родил электрон-позитронную пару. Найдём число и спектр синхротронных фотонов, излученных данной парой. Полное число фотонов с энергией ϵ , излученных заряженной частицей можно записать, проинтегрировав по времени известное выражение для синхротронного спектра:

$$N(\epsilon) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{\alpha_e c}{\lambda_C} \int_0^\infty dt \frac{\epsilon_B}{\epsilon_s(t)} \sin \psi(t) \int_{\epsilon/\epsilon_s}^\infty dx K_{5/3}(x), \quad (38)$$

где ϵ_s - характеристическая энергия синхротронного излучения:

$$\epsilon_s = \frac{3}{2} \epsilon_B \gamma(t)^2 \sin \psi(t) \quad (39)$$

и $\psi(t)$ - питч-угол излучающей частицы. При этом, учитывая сохранение параллельной скорости частицы, имеем для конечной скорости и гамма-фактора частицы $\beta_f = \cos \psi \beta_i$, то есть

$$\gamma_f = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_i^2 \cos^2 \psi}} \approx \frac{\gamma_i}{\sqrt{1 + \gamma_i^2 \psi^2}}. \quad (40)$$

В тоже время, зафиксировав $\gamma_f = \gamma_f(\gamma_i, \psi_i)$, получим зависимость угла ψ от γ в любой момент времени:

$$\psi = \sqrt{\gamma_f^{-2} - \gamma^{-2}} = \sqrt{\gamma_i^{-2} + \psi_i^2 - \gamma^{-2}}. \quad (41)$$

Как можно заметить, при $\gamma_i \psi_i \gtrsim 1$, ψ слабо зависит от γ при $\gamma \sim \gamma_i$. Таким образом, большая часть энергии будет излучена при $\psi = \psi_i$ и хорошим приближением будет положить в формулах (38), (39) $\psi = \psi_i = \text{const}$.

Далее, перейдя к интегрированию по гамма-фактору, получаем следующее выражение для числа синхротронных фотонов, излученных одной частицей:

$$N(\epsilon, \gamma_i, \psi) = \frac{3}{4\sqrt{2}\pi} (\epsilon_B \psi)^{-1/2} \epsilon^{-3/2} [G(\epsilon/\epsilon_s(\gamma_i)) - G(\epsilon/\epsilon_s(\gamma_f))], \quad (42)$$

где

$$G(t) = \int_t^\infty dx K_{5/3}(x) (x^{3/2} - t^{3/2}). \quad (43)$$

Подставляя теперь $\gamma_i = \epsilon_i/2$, $\psi = \psi_a$, получаем:

$$N(\epsilon, \epsilon_i) = \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \sqrt{\ln \Lambda} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_i} \right)^{-3/2} (G[\ln \Lambda \epsilon/\epsilon_i] - G[\ln \Lambda \epsilon/\epsilon_i (1 + (4/(3 \ln \Lambda \epsilon_B))^2)]). \quad (44)$$

Введем теперь равновесные объемные темпы рождения вторичных пар $Q_p(\epsilon)$ и фотонов $Q_\gamma(\epsilon)$, причем величину $Q_p(\epsilon)$ стоит понимать как число пар рождаемых фотонами с энергией ϵ . Также для всех величин полагается локальная зависимость от координат (R, ϕ_m, r_m) . Тогда для Q_p можно записать следующее выражение:

$$Q_p(\epsilon) = \int_0^\infty d\psi R_c \alpha_B(\psi, \epsilon) Q_\gamma(\epsilon) e^{-\tau(R, \epsilon)} = \int_0^\infty d\tau Q_\gamma(\epsilon) e^{-\tau} \approx Q_\gamma(\epsilon) (1 - e^{-\tau_\infty(\epsilon)}) \quad (45)$$

В свою очередь для числа синхротронных фотонов $Q_{\gamma,s}$ имеем:

$$Q_{\gamma,s}(\epsilon) = \int_0^\infty d\epsilon_i N(\epsilon, \epsilon_i) (1 - e^{-\tau_\infty}) Q_\gamma(\epsilon_i) \quad (46)$$

Представляя Q_γ как $Q_\gamma = Q_{\gamma,src} + Q_{\gamma,s}$, получаем итоговое интегральное уравнение (Hibschman and Arons, 2001a):

$$Q_\gamma(\epsilon, \epsilon_0) = \int_0^\infty d\epsilon_i [1 - e^{-\tau_\infty(\epsilon_i)}] \times \frac{1}{\epsilon_i} K\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_i}\right) [\delta(\epsilon_i - \epsilon_0) + Q_\gamma(\epsilon_i, \epsilon_0)], \quad (47)$$

где был подставлен дельта-источник $Q_{\gamma,src}(\epsilon) = \delta(\epsilon - \epsilon_0)$. Тогда для искомого числа пар, рожденных в ходе синхротронного каскада имеем:

$$f_{SR}(\epsilon_0) = \int_0^\infty d\epsilon Q_p(\epsilon, \epsilon_0) = \int_0^\infty d\epsilon (1 - e^{-\tau_\infty(\epsilon)}) Q_\gamma(\epsilon, \epsilon_0), \quad (48)$$

Решение интегрального уравнения (47) несложно получить, вводя дискретизацию в логарифмическом масштабе и решая соответствующее матричное уравнение. На Рис. 8 показаны примеры расчета спектра вторичных частиц в зависимости от местоположения формирования каскада. Как мы видим, с ростом высоты z формируется степенной спектр вторичных частиц. Этот хорошо известный факт (Beskin et al., 2023; Hibschman and Arons, 2001a) подтверждает справедливость нашего рассмотрения.

4.2 Множественность синхротронного каскада

Прежде чем перейти к вычислению итоговых профилей плотности плазмы исследуем подробнее зависимость множественности синхротронного каскада от основных параметров задачи. Таковыми в первую очередь являются напряженность магнитного поля, радиус кривизны силовых линий и энергия первичного фотона. Первые два параметра зависят непосредственно от положения синхротронного каскада в магнитосфере. В силу малости радиуса полярной шапки, напряженность магнитного поля определяется фактически только высотой над нейтронной звездой. Кривизна же магнитных силовых линий преимущественно зависит от положения силовой линии на полярной шапке и меняется в диапазоне от некоторой минимальной на границе полярной шапки до бесконечности в ее центре. Для дипольного магнитного поля и периодов порядка 1 с характерный радиус кривизны составляет $R_c^{min} \sim R_s^2/R_0 \sim 10^8$ см, в то время как для недипольных конфигураций он может оказаться на несколько порядков меньше. Это обстоятельство может существенно усилить синхротронный каскад, однако в данной работе, за неимением явных ограничений на степень недипольности магнитного поля обыкновенных радиопульсаров, мы не будем рассматривать этот случай. Сложнее дело обстоит с определением характерных энергий первичных фотонов, так как здесь, как и при определении ускоряющего потенциала, необходимо рассмотреть три механизма излучения первичных частиц - изгибное излучение (CR) и резонансное (RICS) и нерезонансное (NRICS) обратное комптоновское рассеяние. Для характерных энергий фотонов, рожденных в данных процессах можно привести простые оценки:

$$\epsilon_\gamma^{CR} \sim 3/2 \lambda_e/R_c \gamma_e^3 \sim 5 \cdot 10^3 \quad (49)$$

$$\epsilon_\gamma^{NRICS} \sim \gamma_e \sim 10^7 \quad (50)$$

$$\epsilon_\gamma^{RICS} \sim 2\epsilon_B \gamma_e \sim 0.5 \cdot 10^7 \quad (51)$$

Здесь численные значения приведены для характерных гамма-факторов первичных частиц $\gamma_e \sim 10^7$, определенных в разделе 3. Как можно видеть, энергия первичных изгибных фотонов оказывается много меньше энергии комптоновских. Построим соответствующие карты множественности синхротронного каскада в зависимости от координат над полярной шапкой для разных энергий первичных фотонов.

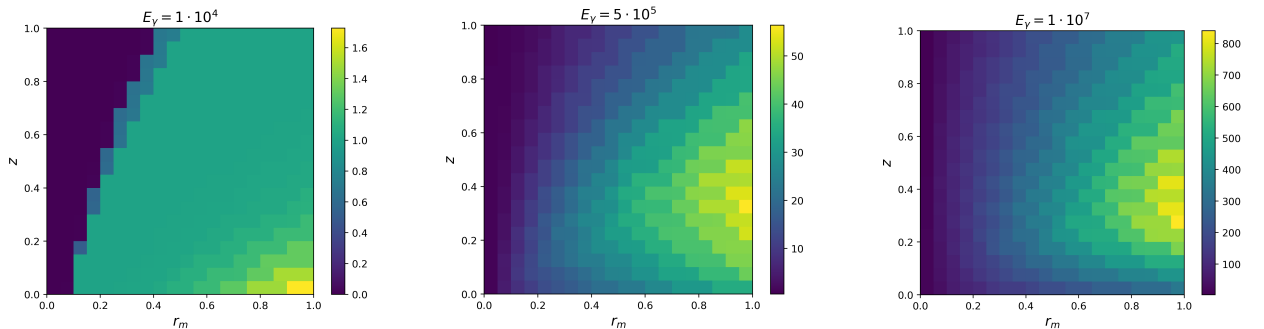


Рис. 9: Распределение множественности синхротронного каскада для различных энергий первичных фотонов.

Посмотрев на результаты, приведенные на Рис. 9 можно сделать два важных наблюдения. В первую очередь стоит отметить, что для характерных энергий изгибного излучения, синхротронный каскад оказывается подавленным. Хотя этот вывод не согласуется со стандартной картиной рождения вторичной электрон-позитронной плазмы в магнитосферах пульсаров, указания на подобные результаты можно найти и в других работах (Timokhin and Harding, 2015; Hibschan and Arons, 2001a). Не стоит, однако, забывать, что энергия первичных фотонов зависит от лоренц-факторов первичных частиц, и для более молодых пульсаров такой механизм генерации вторичных частиц может оказаться существенным. Вторым интересным наблюдением является наличие максимума эффективности синхротронного каскада в зависимости от высоты над полярной шапкой, напрямую задающей величину магнитного поля. Наличие данного максимума можно объяснить на качественном уровне (Timokhin and Harding, 2015). С одной стороны, в малых магнитных полях эффективность подавлена в силу меньшей мощности синхротронного излучения. В то же время при достаточно больших полях вторичные частицы рождаются с малыми питч-углами, что приводит к тому что большая часть энергии первичных частиц остается в продольном движении вторичных частиц, а не переходит в синхротронные фотоны. Таким образом, будет существовать некоторое магнитное поле, для которого множественность каскада будет максимальной.

4.3 Источник первичных фотонов

Перейдем к определению спектра первичных фотонов n_γ . Как уже отмечалось, для этого необходимо рассмотреть как изгибное излучение, так и обратное комптоновское рассеяние. Учитывая отмеченную выше существенную разницу в интенсивностях синхротронных каскадов запускаемых этими процессами, вопрос о выборе доминирующего механизма становится особенно нетривиальным. Для оценки вклада комптоновского рассеяния можно воспользоваться приближенными выражениями для темпа рождения пар (числа фотонов, рождаемых одной первичной частицей) (Hibschan and Arons, 2001b):

$$\dot{N}_{NR} \approx 1.5 \cdot 10^9 \gamma^{-1} T_6^2 \Delta\mu \text{ c}^{-1}, \quad (52)$$

$$\dot{N}_R \approx 10^{13} \gamma^{-2} B_{12} T_6 \text{ c}^{-1}, \quad (53)$$

$$\dot{N}_{CR} \approx \gamma \rho_8^{-1} \text{ c}^{-1}. \quad (54)$$

Здесь величина T_6 является температурой полярной шапки в единицах 10^6 K, ρ_8 — радиус кривизны магнитных силовых линий в единицах 10^8 см, а $\Delta\mu = 1 - \mu_{\min}$.

Сравнить эффективность генерации вторичной плазмы для трех механизмов можно, домножив величины $\dot{N}$ на фактор $f_{SR}(\epsilon_\gamma(\gamma_e))$, где механизм генерации первичных фотонов определяет вид $\epsilon_\gamma(\gamma_e)$. Так, для изгибного излучения $\epsilon_\gamma \sim 3/2 \lambda_e/R_c \gamma_e^3$, для нерезонансного обратного комптоновского рассеяния в пределе Клейна-Нишины $\epsilon_\gamma \sim \gamma_e$, а для резонансного — $\epsilon_\gamma \sim 2\epsilon_B \gamma_e$. Учитывая, что характерный масштаб генерации вторичной плазмы есть масштаб спада магнитного поля т.е. радиус звезды, величину λ_1 можно оценить как $\dot{N}(\gamma_e) f_{SR} R/c$.

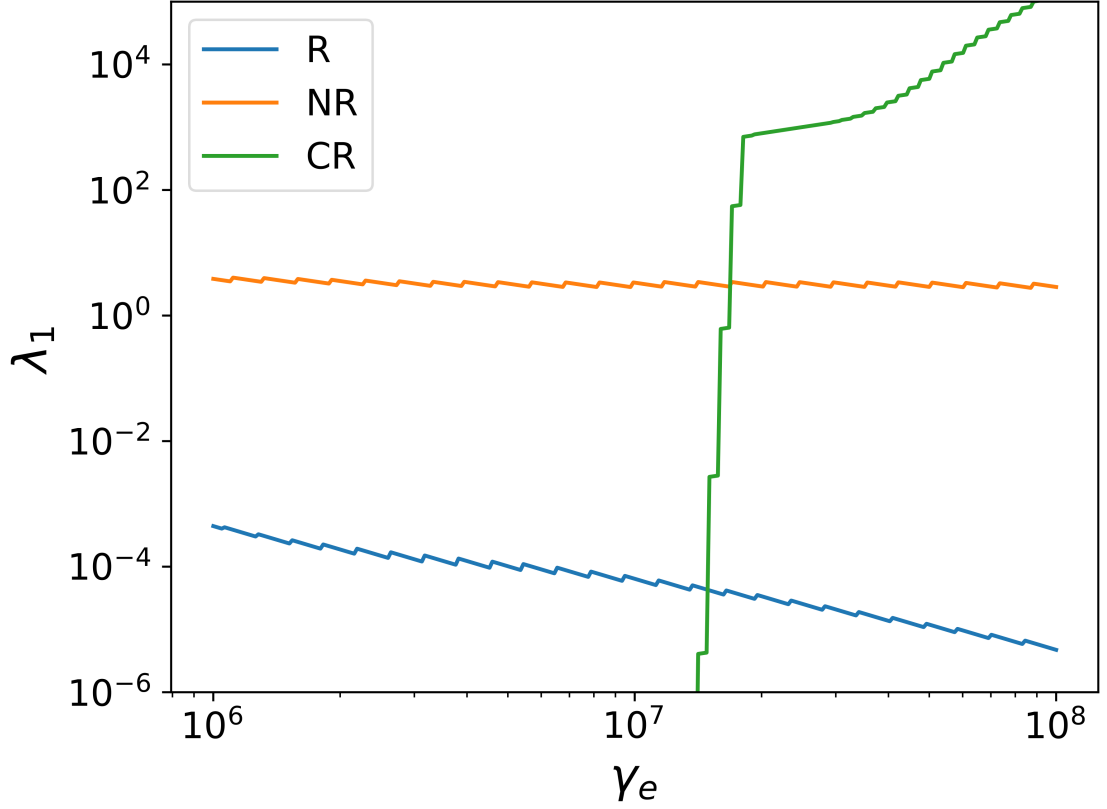


Рис. 10: Сравнение эффективности генерации вторичной плазмы для изгибного излучения и обратного резонансного и нерезонансного комптоновского рассеяния.

Результаты расчета для интересующих нас γ -факторов первичных частиц представлены на Рис. 10. Как можно видеть, во всем интересующем нас диапазоне энергий обратным комптоновским рассеянием можно пренебречь. Более того, результаты для нерезонансного рассеяния, представленные на Рис. 10, получены для $\Delta\mu = 1$, в то время как характерные значения $\Delta\mu$ на высотах порядка радиуса звезды составляют $(R_0/R)^2 \ll 1$.

Поскольку же, как уже было сказано выше, масштаб генерации вторичной плазмы составляет несколько радиусов звезды, приведенная оценка на самом деле значительно завышена. Поэтому в данном разделе мы ограничимся рассмотрением только изгибного механизма. В этом случае концентрация первичных фотонов n_γ определяется спектром изгибного излучения

$$dN_\gamma^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^2}{cR_c(z)} \frac{\gamma_e F(\omega/\omega_c)}{\hbar\omega} d\omega dz \equiv n_\gamma d\omega dz, \quad (55)$$

где

$$F(t) = t \int_t^\infty K_{5/3}(x) dx \quad (56)$$

и

$$\omega_c = \frac{3}{2} \frac{c}{R_c} \gamma_e^3. \quad (57)$$

Определив количество частиц λ_1 , рождаемых одной первичной частицей, можно найти и концентрацию вторичной плазмы, домножив λ_1 на концентрацию первичных

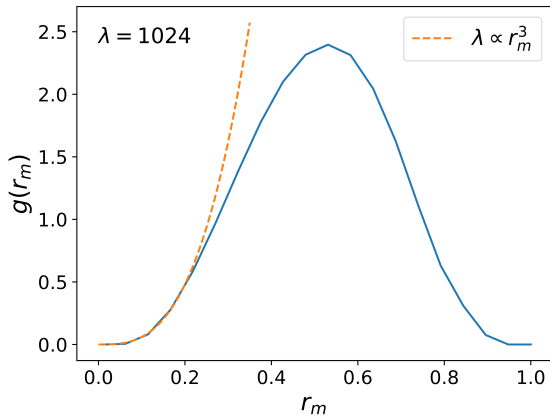
частиц, то есть на гольдрайховскую плотность. Тогда, согласно определению (31), имеем

$$\lambda g(r_m, \phi_m) = \lambda_1(r_m, \phi_m) \cdot \begin{cases} 1, & \chi < 85^\circ, \\ \cos \theta_b / \sqrt{\frac{\Omega R}{c}}, & \chi > 85^\circ. \end{cases} \quad (58)$$

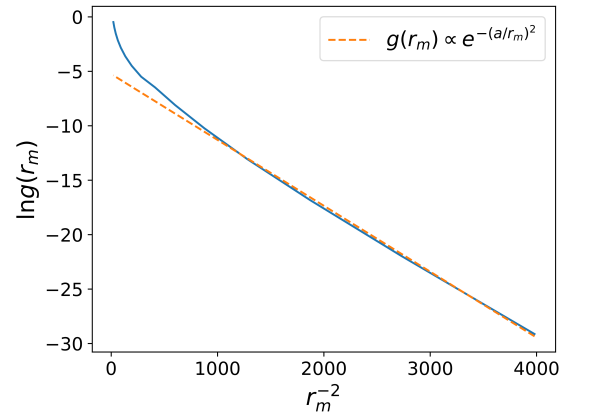
4.4 Осесимметричный случай

Как и при определении ускоряющего потенциала, удобно отдельно рассматривать неортогональные и ортогональные пульсары. В осесимметричном случае полученные результаты интересно сравнить с работой Beskin et al. (2023), где аналогичные вычисления проводились, фактически, для пульсаров вблизи к линии смерти (т.е. вся магнитосфера полагалось вакуумной). Хотя качественная форма полученных профилей совпадает с результатами данной работы, существует и несколько существенных отличий.

Прежде всего, оказалось, что энергии первичных фотонов как правило не хватает, чтобы запустить многоступенчатый синхротронный каскад. То есть величина f_{SR} близка к 1 для энергий изгибных фотонов. Соответственно, и множественность вторичной плазмы при одинаковых параметрах оказалась меньше, чем в работе Beskin et al. (2023). Еще одно отличие касается асимптотического поведения профиля концентрации вблизи магнитной оси. В то время как в работе Beskin et al. (2023) на основании качественных соображений утверждалось, что с хорошей точностью можно положить $g(r_m) \propto r_m^3$ при $r_m \ll 1$, в настоящей работе был получен результат $g(r_m) \propto \exp[-a^2/r_m^2]$, $a \ll 1$ (см. Рис. 11a-11b). Данная асимптотика следует из разложения спектра изгибного излучения (55) вблизи магнитной оси, который не был учтен в работе Beskin et al. (2023). Стоит однако отметить, что полученная выше асимптотика применима лишь вблизи магнитной оси ($r_m < 0.03$), в то время как кубическая зависимость лучше описывает профиль на больших масштабах $0.03 < r_m < 0.2$. Так что для практических целей следует пользоваться асимптотикой $g(r_m) \propto r_m^3$.



(a) Профиль концентрации вторичной плазмы $g(r_m)$ для пульсара с параметрами $P = 0.5$ с, $B_{12} = 1.0$, $\chi = 10^\circ$. Штриховой линией показано приближение $g \propto r_m^3$.



(b) Линеаризация поведения профиля концентрации в пределе $r_m \rightarrow 0$. Штриховой линией показана асимптотика $g(r_m) \propto e^{-(a/r_m)^2}$.

4.5 Неосесимметричный случай

На Рис. 12 показаны поперечные профили концентрации $\lambda g(r_m, \phi_m)$ для различных магнитных полей B_{12} и углов наклона χ и периода $P = 0.3$ с, характерного для интеримпульсных пульсаров. Как можно видеть, для умеренных магнитных полей и углов χ , мало отличающегося от 90° , генерация плазмы оказывается в значительной степени подавленной. При этом профили плотности в целом повторяют профили, определенные ранее в работе Novoselov et al. (2020) в рамках качественного рассмотрения. Тем самым, остается в силе и основной вывод этой статьи, касающийся статистики интеримпульсных пульсаров (наблюдаемое число интеримпульсных пульсаров говорит в пользу закона эволюции угла χ в сторону углов $\sim 90^\circ$).

Напомним, что для ортогональных пульсаров сама возможность генерации вторичной плазмы оказывается под вопросом. Действительно, при $\chi \sim 90^\circ$ гольдрайховская плотность (3) значительно меньше, чем в неортогональном случае. Так как данная величина является источником в уравнении Пуассона (4), при прочих равных условиях ортогональные пульсары должны обладать заметно меньшим ускоряющим потенциалом, что должно сказаться на возможности генерации плазмы.

Особенно интересен это вопрос в контексте необходимой для генерации вторичной плазмы величины магнитного поля, оценить которое невозможно без явного использования модели эволюции. Хотя для обыкновенных пульсаров выбор конкретной модели приводит лишь к различию на фактор $\sim (2 \div 3)$, для ортогональных пульсаров разница может быть заметно больше. Действительно, в то время как общепринятая МГД-модель эволюции (Spitkovsky, 2006; Kalapotharakos et al., 2012; Tchekhovskoy et al., 2016b) предсказывает магнитные поля, мало отличающиеся от стандартной оценки $B_{12} \approx \dot{P}_{-15}^{1/2} P^{1/2}$

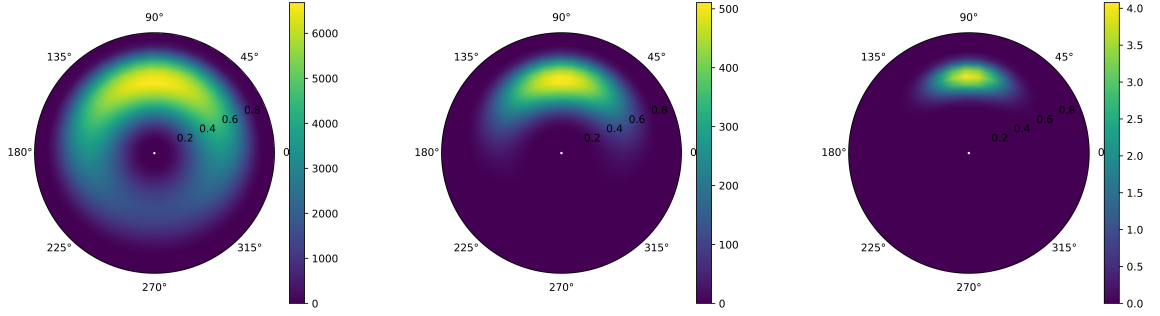
$$B_{12}^{\text{MHD}} \approx \frac{\dot{P}_{-15}^{1/2} P^{1/2}}{\sqrt{1 + \sin^2 \chi}}, \quad (59)$$

в рамках BGI-модели, предложенной в работе Beskin et al. (1993), магнитное поле записывается в виде

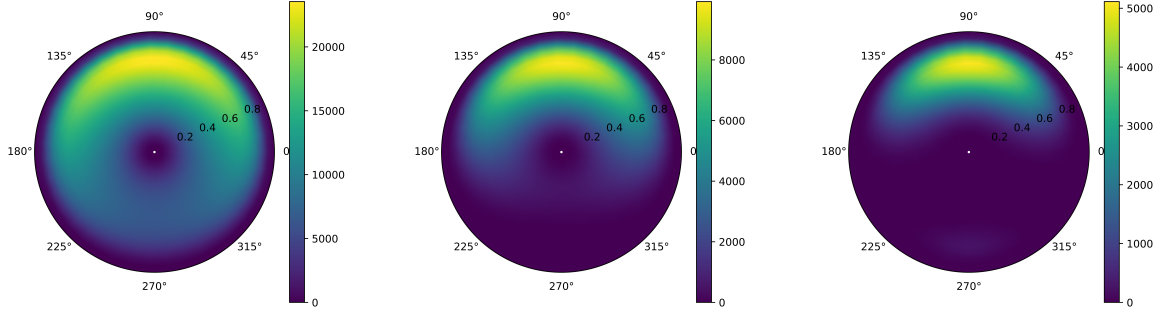
$$B_{12}^{\text{BGI}} \approx \frac{\dot{P}_{-15}^{1/2} P^{1/2}}{\sqrt{\cos^2 \chi + \mathcal{C}}}, \quad (60)$$

где $\mathcal{C} \sim \sqrt{\Omega R/c} \ll 1$. В результате соотношение (60) для ортогональных пульсаров приводит к оценке $B_{12} \approx 10 P^{3/4} \dot{P}_{-15}^{1/2}$ Novoselov et al. (2020), которая дает значения магнитного поля, в несколько раз большие, чем предсказывает модель MHD, что в свою очередь обеспечивает генерацию вторичных частиц в магнитосфере ортогональных пульсаров в большем диапазоне периодов.

Этот вопрос, однако, требует более детального анализа, выходящего за рамки настоящей работы. Соответственно, в данной работе не преследовалась и цель проводить расчеты для конкретных радиопулсаров. В частности поэтому мы ограничились лишь обсуждением самой модели генерации вторичной плазмы для магнитных полей, превышающих стандартные оценки для интеримпульсных пульсаров, но не выходящих за пределы применимости нашей модели: $B < B_{\text{cr}}$ (Istomin and Sobyenin, 2007).



(a) $P = 0.3$ c, $B_{12} = 1.5$, $\chi = 85^\circ$. (b) $P = 0.3$ c, $B_{12} = 1.5$, $\chi = 88^\circ$. (c) $P = 0.3$ c, $B_{12} = 1.5$, $\chi = 89.3^\circ$.



(d) $P = 0.3$ c, $B_{12} = 7.0$, $\chi = 85^\circ$. (e) $P = 0.3$ c, $B_{12} = 7.0$, $\chi = 88^\circ$. (f) $P = 0.3$ c, $B_{12} = 7.0$, $\chi = 89.3^\circ$.

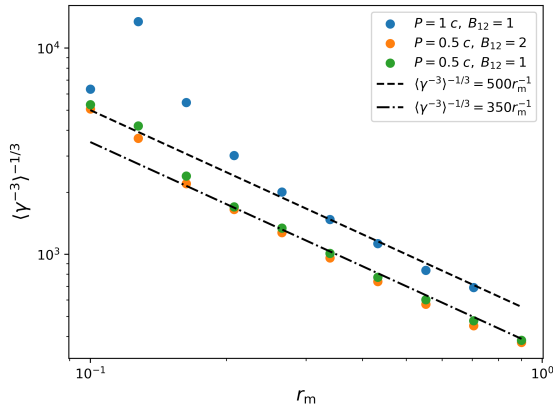
Рис. 12: Поперечные профили концентрации $\lambda g(r_m, \phi_m)$ для ортогональных пульсаров для различных магнитных полей и углов наклона.

4.6 Гамма-факторы вторичных частиц

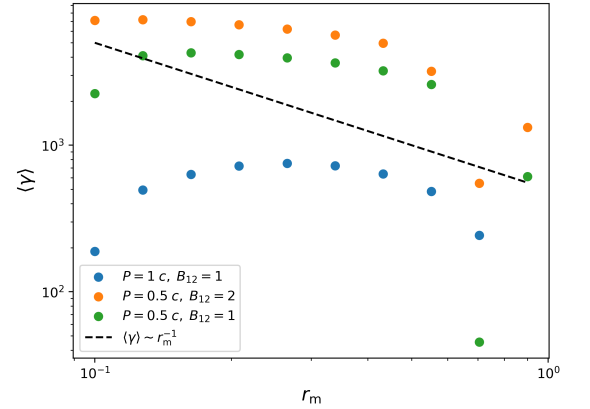
Для изучения эффектов распространения радиоизлучения в магнитосфере пульсаров необходимо знать не только пространственное распределение плотности вторичных частиц, но так же и их характерные гамма-факторы. Данный вопрос уже изучался в работе [Beskin et al. \(2023\)](#), однако вычисления проводились в приближении вакуумной магнитосферы, применимом для старых пульсаров. Таким образом, интересно проверить результаты работы [Beskin et al. \(2023\)](#) воспользовавшись более реалистичной моделью, предложенной в данной работе. Одним из основных фокусов той работы было исследование преломления О-моды, в показатель преломления которой входит среднее $\langle 1/\gamma^3 \rangle$. Для данной величины было показано, что с хорошей точностью выполняется зависимость $\langle 1/\gamma^3 \rangle \sim r_m^{-1}$. В рамках используемого в данной работе подхода $\langle f(\gamma) \rangle$ можно вычислить следующим образом (f - произвольная функция, обладающая средним):

$$\langle f(\gamma) \rangle = \int_0^\infty dz \int_{\epsilon_{\min}}^\infty d\epsilon_i n_\gamma(z, \epsilon_i; r_m, \varphi_m) f_{\text{SR}}(z, \epsilon_i; r_m) f(\gamma(\epsilon_i)). \quad (61)$$

Как можно видеть на Рис. [13a](#), данный результат подтверждается и в данной работе. Однако, уже для среднего гамма-фактора $\langle \gamma \rangle$ зависимость $\langle \gamma \rangle \sim r_m^{-1}$ не выполняется (см. Рис. [13b](#)). Это различие, как и асимптотику r_m^{-1} , нетрудно объяснить. Действитель-



(a) Значение среднего $\langle 1/\gamma^3 \rangle^{-1/3}$ в зависимости от расстояния до магнитной оси



(b) Средний гамма-фактор вторичной электрон-позитронной плазмы в зависимости от расстояния до магнитной оси

но, из уравнения [\(40\)](#) следует, что гамма-факторы вторичных частиц γ_f можно оценить как $\gamma_f \sim 1/\psi_a$. В то же время значения ψ_a определяются из уравнения [\(36\)](#). При больших энергиях фотонов, имеем $t_a \ll 1$ и $t_a \sim 1/\epsilon_i$. Однако при энергиях фотонов близких к $\epsilon_{\min}$, получаем $\psi_a \sim \psi_\infty \sim R/R_c \sim r_m$. В таком случае $\gamma_f \sim r_m^{-1}$. При усреднении же γ^{-3} , наибольший вклад вносят частицы с низкими гамма-факторами, для которых и выполняется $\gamma_f \sim r_m^{-1}$. Таким образом, получаем искомую зависимость $\langle 1/\gamma^3 \rangle = k_\gamma r_m^{-1}$. При этом, соответствующий коэффициент пропорциональности k_γ определяется только геометрией магнитных силовых линий, в случае дипольного поля соответствующей зависимости $k_\gamma \sim \sqrt{P}$, что можно видеть в численных расчетах, представленных на [13a](#). При вычислении же среднего гамма-фактора, существенный вклад начинает вносить высокоэнергетическая часть спектра, и результат начинает существенным образом

зависеть от структуры ускоряющего потенциала. Важным выводом из этого анализа является то, что коэффициент преломления О-моды практически не зависит от формы спектра частиц и может быть с достаточной точностью оценен без непосредственного анализа рождения электрон-позитронных пар. В то же время, форма спектра оказывается существенной, например, для вычисления оптической толщи при циклотронном поглощении (Luo and Melrose, 2001).

5 Статистика ортогональных радиопульсаров и их функция видимости

5.1 Модель эволюции радиопульсаров

Одним из важнейших вопросов, касающихся радиопульсаров, является вопрос об их модели эволюции и, в частности, об эволюции угла наклона магнитной оси к оси вращения. На текущий момент можно выделить две модели магнитосферы, приводящие к принципиально разной эволюции угла наклона - основанная на численных МГД симуляциях MHD модель (Spitkovsky, 2006; Philippov and Spitkovsky, 2014) и полуаналитическая модель BGI (Beskin et al., 1983, 1993). Безусловно, предсказания моделей не должны отличаться друг от друга только вследствие различного подхода к вычислениям и, действительно, данные модели строятся на разных физических предположениях. Основным отличием моделей является способ определения тока, текущего в магнитосфере. Данный ток, будучи напрямую связанным с поверхностными токами на звезде, определяет момент сил, тормозящий пульсар, и тем самым закон его эволюции. Существенной же сложностью здесь является то, что традиционный аналитический подход, заключающийся в применении уравнения Грэда-Шафранова не фиксирует продольный ток, который фактически становится свободным параметром. Другим ключевым моментом является то, что само решение уравнения Грэда-Шафранова формально может быть продолжено только до так называемой световой поверхности (поверхность равенства электрического и магнитного полей $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$).

Однако, с развитием численных force-free (Contopoulos et al., 1999; Spitkovsky, 2006) и MHD (Komissarov, 2006) моделей стало ясно, что требование гладкого продолжения решений соответствующих уравнений до бесконечности однозначно фиксирует магнитосферный ток. Таким образом, в модели MHD, продольный ток, текущий в магнитосфере, определяется из глобального решения. Несложно показать, что для ортогональных ротаторов он мало отличается от тока для соосных ротаторов, потери энергии в данной модели растут с ростом угла наклона магнитной оси к оси вращения χ , а угол наклона уменьшается с течением времени.

В тоже время, в модели BGI не делается предположений о возможности гладкого продолжения МГД уравнений за световую поверхность, продольный ток определяется физикой процессов, происходящих вблизи полярных шапок пульсара и близок к т.н. току Гольдрайха-Джулиана $j = c\rho_{\text{GJ}}$, где соответствующая плотность заряда

$$\rho_{\text{GJ}} = -\frac{\Omega \mathbf{B}}{2\pi c} \propto \cos \chi \quad (62)$$

($\Omega = 2\pi/P$ есть угловая частота вращения нейтронной звезды) существенно зависит от угла наклона χ . В результате для ортогональных пульсаров полный продольный ток, циркулирующий в магнитосфере, оказывается в $(\Omega R/c)^{1/2}$ раз (т.е. в 100 раз для обычных пульсаров) меньше, чем для соосных ротаторов. Соответственно, в этой модели потери энергии падают с ростом угла наклона χ , а сам угол наклона χ стремится к 90° .

Отметим, что прямое измерение направления эволюции угла, а именно определение

величины $\dot{\chi}$ для индивидуальных пульсаров на данный момент невозможно. Действительно, даже само определение угла χ на данный момент является крайне неточной процедурой (Beskin and Philippov, 2012). Более того, статистические исследования распределений пульсаров по их периоду P и углу наклона χ также не позволяют сделать однозначных выводов. С одной стороны, уже давно было показано, что усредненный угол наклона $\langle\chi(P)\rangle$ уменьшается с ростом периода P (Tauris and Manchester, 1998). Соответственно, усредненные ширины средних профилей $\langle W_r(P) \rangle$ также увеличиваются с ростом периода (Rankin (1990); Faucher-Giguère and Kaspi (2006); Weltevrede and Johnston (2008)). Уже много лет по мнению многих (Maciesiak et al. (2012); Johnston et al. (2023)) эти результаты являются прямым доказательством того, что и у каждого индивидуального пульсара угол χ уменьшается со временем. С другой же стороны нельзя не забывать о существовании линии смерти (Ruderman and Sutherland, 1975; Cheng and Ruderman, 1979; Beskin and Litvinov, 2022), напрямую связанной с наличием максимально возможного ускоряющего потенциала, соответствующего полностью вакуумной магнитосфере:

$$\psi_{\max} \approx 2\pi\rho_{\text{GJ}}R_0^2. \quad (63)$$

Хотя это выражение и является оценочным, значительно более точный анализ, выполненный в работах (Beskin and Litvinov (2022); Beskin and Istomin (2022)) привел к качественно тем же результатам. Как можно видеть, максимальный потенциал явным образом зависит от гольдрайховской плотности, а следовательно и от периода P и угла наклона χ . Таким образом, чтобы нейтронная звезда могла наблюдаться как радиопульсар, имеем (Beskin et al. (1983)):

$$\cos \chi > kP^{15/7}B_{12}^{-8/7}, \quad (64)$$

где $k \sim 1$. Вследствие этого, независимо от направления эволюции индивидуальных пульсаров усредненные значения $\langle\chi(P)\rangle$ должны уменьшаться с ростом периода. Таким образом, был необходим другой способ верификации той или иной модели эволюции радиопульсаров. Такой способ был предложен в работе (Novoselov et al. (2020)).

5.2 Количество ортогональных радиопульсаров

В данной работе, на основе решения кинетических уравнений для эволюции пульсаров, было показано, что модели BGI и MHD предсказывают различное относительное количество ортогональных пульсаров. Так, согласно этой работе, число ортогональных интеримпульсных пульсаров не должно превышать 1% для модели MHD, в то время как модель BGI предсказывает значения порядка (2.5 - 5.5)%. Однако, данный результат существенным образом зависит от, так называемой, функции видимости. Данная функция определяет область геометрических параметров (угол наклона магнитной оси к оси вращения и угол наблюдения) при которых пульсар может быть наблюдаем с Земли. Действительно, вследствие того, что диаграмма направленности пульсаров заполнена

¹При собственной ширине диаграммы направленности W_0 наблюдаемая ширина среднего профиля зависит от угла χ как $W_r \approx W_0/\sin \chi$.

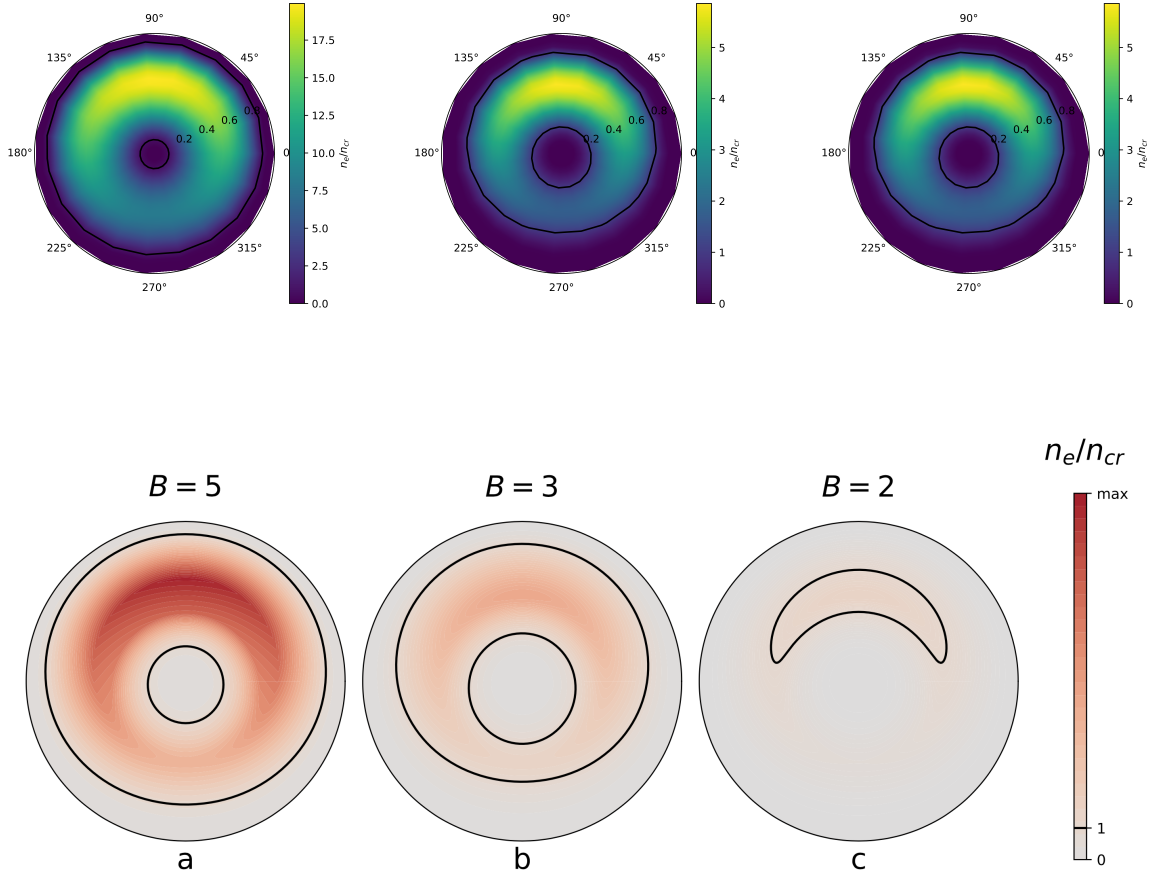


Рис. 14: Сравнение вычисленных в данной работе поперечных профилей плотности с феноменологической моделью, использовавшейся в работе [Novoselov et al. \(2020\)](#). Верхний ряд соответствует вычислениям выполненным в рамках метода, предложенного в данной работе, в то время как нижний ряд соответствует Рис. 2 из статьи [Novoselov et al. \(2020\)](#).

вторичной плазмой не полностью, даже при формальном ее пересечении с лучом зрения, возможна ситуация, когда пульсар не излучает в сторону наблюдателя.

Для исследования данного вопроса в работе [Novoselov et al. \(2020\)](#) была использована крайней простая феноменологическая модель распределения плазмы по полярной шапке. Теперь же, имея результаты, представленные в части [4](#), можно верифицировать вычисления представленные в работе Новоселова. На Рис. [14](#) можно видеть профили плотности плазмы, нормализованные на некоторую критическую концентрацию n_{cr} , соответствующую эффективной генерации излучающей плазмы, и численное значение которой было получено из анализа линии смерти. Таким образом, контуры $n/n_{cr} = 1$ определяют “истинную” диаграмму направленности. Как можно видеть, на качественном уровне модели предсказывают похожие результаты, что подтверждает справедливость предсказаний, сделанных в работе [Novoselov et al. \(2020\)](#).

Также стоит отметить, что статистический анализ проведенный в этой работе был основан на компиляционном каталоге, и, соответственно, на неоднородной выборке. Как, однако, уже упоминалось в части [1](#), новейшие данные телескопов FAST и MeerKAT

Таблица 1: Наблюдаемое абсолютное и относительное количество ортогональных интеримпульсных пульсаров для различных обзоров.

	$P < 0.033 \text{ c}$	$0.033 \text{ c} < P < 0.5 \text{ c}$	$0.5 \text{ c} < P < 1 \text{ c}$	$P > 1 \text{ c}$
Novoselov et al	— —	$18 \div 26$ $(1.8 \div 2.6)\%$	$3 \div 5$ $(0.4 \div 0.7)\%$	$0 \div 1$ $(0.0 \div 0.1)\%$
FAST	8 11%	14 6.0%	3 1.7%	1 1.0%
MeerKAT	0 0%	25 4.2%	4 1.0%	0 0%
BCA	0 0%	$1 \div 2$ $(3 \div 7)\%$	$0 \div 1$ $(0 \div 3)\%$	1 2%

позволяют выполнить аналогичный анализ на уже однородной выборке. Для определения числа ортогональных интеримпульсных пульсаров по данным обсерватории FAST мы воспользовались Рис. A6 из работы [Wang et al. \(2023\)](#), содержащим 27 средних профилей интеримпульсных пульсаров. Из них были выбраны 26 объектов, у которых угловое расстояние между импульсом и интеримпульсом составляло 180° , что, как известно (см., например [Weltevrede and Johnston \(2008\)](#)), как раз и позволяет отнести их к интересующему нас классу объектов.

Что же касается обсерватории MeerKAT, то для выбора ортогональных интеримпульсных пульсаров из данных работы [Johnston et al. \(2023\)](#) отбирались те источники, для которых можно было однозначно отделить главный импульс от интеримпульса, и расстояние между ними по фазе также составляло $\sim 180^\circ$.

Так, в таблице [1](#) приведено относительное и абсолютное количество ортогональных интеримпульсных пульсаров в соответствующих диапазонах периодов для различных каталогов. Как можно видеть данные работы [Novoselov et al. \(2020\)](#) согласуются с данными обзоров FAST и MeerKAT. Также, несмотря на малую статистику, в таблице [1](#) приводятся данные БСА ПРАО ([Горопов et al., 2024](#)), которые, также не противоречат результатам других обсерваторий.

5.3 Распределение ортогональных пульсаров по периоду

Другим, возможно даже более важным наблюдением, является то, что в распределении ортогональных пульсаров по периодам имеется резкий обрыв на периодах $P \sim 0.5 \text{ c}$. Действительно, неравенство [\(64\)](#) фактически означает, что линия смерти для ортогональных пульсаров проходит на диаграмме $P - \dot{P}$ заметно выше, чем для обыкновенных радиопульсаров. Тем самым, в модели BGI ожидается, что такие объекты обладают в среднем меньшими периодами. В тоже время модель MHD не предсказывает существенной разницы. Считая, что для ортогональных пульсаров характерный угол между магнитной силовой линией и осью вращения составляет $\sim (\Omega R/c)^{1/2}$, из выражения [\(64\)](#)

Таблица 2: Наблюдаемое количество ортогональных интеримпульсных пульсаров для различных обзоров в диапазоне периодов $0.03 \text{ с} < P < 0.5 \text{ с}$ в процентах.

	0.03–0.1	0.1–0.2	0.2–0.3	0.3–0.4	0.4–0.5
Новоселов и др.	$0.4 \div 0.6$	$1.0 \div 1.9$	$1.4 \div 1.6$	$0.6 \div 0.8$	$0.2 \div 0.4$
FAST	0.4	2.1	1.7	1.3	0.4
MeerKAT	0.3	1.2	1.5	1.0	0.3

мы можем получить:

$$P < 0.2B_{12}^{16/37} \text{ с.} \quad (65)$$

Учитывая, что характерные магнитные поля радиопульсаров составляют $B_{12} \sim 1$, получаем, что периоды ортогональных ротаторов как раз должны меньше (0.2 - 0.3) с. Данный результат можно проверить непосредственно, воспользовавшись новейшими данными обсерваторий MeerKAT и FAST, а также компиляционным каталогом [Novoselov et al. \(2020\)](#). Как можно видеть из таблицы [2](#), максимум распределения периодов соответствует значениям 0.2 – 0.3 с. Также имеется резкое падение числа ортогональных пульсаров на периодах $P > 0.5 \text{ с}$. Однако, для окончательной проверки данного результата следует сравнить данное распределение с распределением периодов всех пульсаров в выборках.

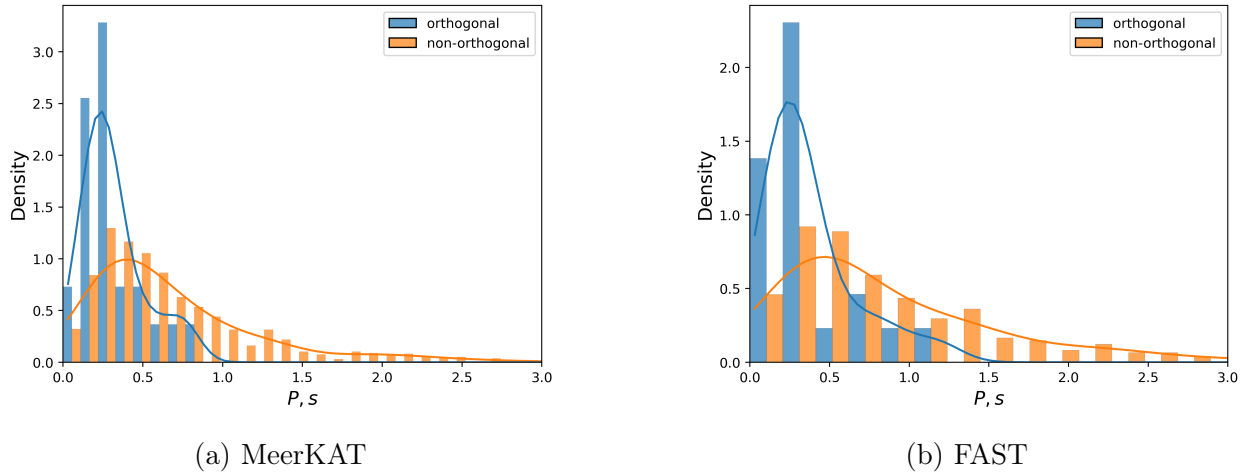


Рис. 15: Распределения ортогональных и неортогональных пульсаров по периоду. Сплошная линия соответствует ядерной оценке плотности.

Выполним соответствующую статистическую проверку рассматриваемой гипотезы о том, что ортогональные пульсары имеют в среднем меньшие периоды, чем обыкновенные пульсары. Для этого воспользуемся односторонним пермутационным тестом ([Pesarin and Salmaso, 2010](#)) с уровнем значимости 95%, в качестве тестовой статистики которого выбрана медиана выборки. Как для выборки MeerKAT, так и для выборки FAST получаем, $p\text{-value} \sim 10^{-4}$, что говорит о том, что между соответствующими медианами имеется существенное статистическое отличие. Как видно на Рис. [15](#), хотя максимумы распределений обыкновенных и ортогональных пульсаров по периоду и

находятся в одной области, распределение для обыкновенных пульсаров имеет существенный хвост в области больших периодов. Это как раз и соответствует сдвигу линии смерти для ортогональных пульсаров.

6 Заключение

В работе был предложен новый подход к определению ускоряющего потенциала над полярной шапкой нейтронной звезды. В его основе лежит концепция вакуумного зазора, высота которого полагается зависимой от координат на полярной шапке и определяется самосогласованно совместно с электрическим потенциалом. Для реализации данного подхода была построена численная процедура, заключающаяся в итеративном решении уравнения Пуассона в вакуумной области и пересчете формы ее верхней границы. Для решения трехмерного уравнения Пуассона в области с изменяющейся геометрией был успешно применен метод Physics Informed Neural Networks (PINN).

Важно отметить, что предложенный подход впервые позволил количественно определить структуру ускоряющего потенциала для ортогональных пульсаров, являющихся для таких объектов существенно неосесимметричной. Используя данный метод и модель генерации вторичной электрон-позитронной плазмы были проведены расчеты поперечных профилей концентрации как для обыкновенных, так и для ортогональных пульсаров. Также было исследовано влияние обратного комптоновского рассеяния на рассматриваемые процессы и было показано, что даже при температуре полярной шапки $T \sim 10^6$ К этим процессом можно пренебречь.

Далее, для ортогональных пульсаров было проведено предварительное исследование зависимости эффективности генерации электрон-позитронных пар от величины магнитного поля и угла наклона магнитной оси к оси вращения. Было показано что, для углов $89^\circ \lesssim \chi \lesssim 91^\circ$ и умеренного магнитного поля $B_{12} \sim 2$, множественность вторичной плазмы оказывается на несколько порядков меньше, чем для обыкновенных пульсаров. В то же время, как хорошо известно (Novoselov et al., 2020), ортогональные радиопульсары наблюдаются, и оценки угла наклона магнитной оси к оси вращения для некоторых из этих объектов попадают в указанный диапазон.

Можно предложить несколько объяснений такому противоречию. В первую очередь, так как оценки углов наклона пульсаров имеют большую погрешность, может оказаться, что пульсары с такими углами просто не наблюдаются. Другим объяснением может являться большее по сравнению с магнито-дипольной оценкой магнитное поле, что в свою очередь предполагает уточнение модели эволюции пульсаров. Также не стоит исключать и возможную недипольность магнитного поля, также способную усилить процессы генерации вторичной плазмы. Таким образом, данное наблюдение мотивирует обратить большее внимание на светимости ортогональных пульсаров и оценки их углов наклона магнитной оси к оси вращения.

Отметим, что одним из основных приложений полученных результатов является изучение распространения радиоизлучения в магнитосфере нейтронной звезды. Действительно, как было показано в работах (Beskin and Philippov, 2012; Petrova and Lyubarskii, 2000; Beskin et al., 2023), эффекты преломления и поглощения играют существенную роль в формировании среднего профиля интенсивности. Таким образом, верификация моделей генерации радиоизлучения невозможна без учета реального поперечного профиля концентрации вторичной плазмы. Кроме того, информация о профилях плотности

плазмы для ортогональных пульсаров позволила уточнить их функцию видимости, что необходимо для анализа статистики данных объектов (Novoselov et al., 2020).

Данный анализ был проведен с использованием новейших данных обсерваторий MeerKAT и FAST, что позволило уточнить и расширить выводы, сделанные в работе Novoselov et al. (2020). Так, вывод о том, что в модели BGI относительное число ортогональных интеримпульсных пульсаров в диапазоне $0.033 \text{ с} < P < 0.5 \text{ с}$ должно быть заметно больше 2%, тогда как в модели MHD меньше 1%, остается в силе. Тем самым, данные обзоров FAST и MeerKAT говорят в пользу эволюции угла наклона осей по направлению к 90° . Еще более важным результатом является малость числа ортогональных интеримпульсных пульсаров с периодами $P > 0.5 \text{ с}$. Данный результат является модельно-независимым, и соответствует классической линии смерти, основанной на рудермановском потенциале. В то же время, он противоречит общепринятой точке зрения, в которой ускоряющий потенциал определяется магнитосферным током и слабо зависит от угла наклона χ .

Конечно, нельзя не отметить модельность решенной задачи. Действительно, многие численные (Timokhin and Arons, 2013; Timokhin and Harding, 2015; Philippov et al., 2015) и аналитические (Tolman et al., 2022) работы указывают на существенную нестационарность генерации вторичной плазмы. Поэтому результаты данной работы скорее отражают пиковые значения концентрации, чем средние величины, так как фактически модель вакуумного зазора описывает начальные стадии генерации плазмы. Этот факт, в частности, может быть важным при исследовании синхротронного поглощения, так как зачастую оценочные значения множественности вторичной плазмы предсказывают аномально большие значения коэффициента поглощения.

Таким образом, границы применимости предложенной модели требуют отдельного, детального исследования. Тем не менее на данный момент не существует нестационарных моделей, позволяющих определить пространственное распределение вторичной плазмы над полярной шапкой. Здесь нельзя ни упомянуть новые работы по PIC (particle in cell) моделированию генерации плазмы и излучения над полярной шапкой (Chernoglazov et al., 2024; Benáček, Jan et al., 2024). Однако, на данный момент эти модели не позволяют получить реалистичные профили плотности вторичной плазмы. В наибольшей степени это связано с крайне упрощенной физикой рождения электрон-позитронных пар, не учитывающей, в частности, кривизну магнитных силовых линий. Другим важным фактором является то, что данные численные модели основаны на МГД подходе, описанном в главе 5.1, в то время как в данной работе были выявлены его противоречия с наблюдениями. Тем не менее, будет крайне интересно сравнить результаты данной работы с нестационарными численными моделями, когда их точность и комплексность станет достаточной для определения профиля плотности истекающей плазмы.

Список литературы

- Pavel Abolmasov, Anton Biryukov, and Sergei B. Popov. Spin Evolution of Neutron Stars. *Galaxies*, 12(1):7, February 2024. doi: 10.3390/galaxies12010007.
- J. Arons. Pair creation above pulsar polar caps : geometrical structure and energetics of slot gaps. *Astrophys. J.*, 266:215–241, March 1983. doi: 10.1086/160771.
- L.I. Arzamasskiy, V.S. Beskin, and Pirov K.K. Statistics of interpulse radio pulsars: the key to solving the alignment/counter-alignment probleme. *MNRAS*, 466:2325–2336, April 2017. doi: 10.1093/mnras/stw3139.
- Benáček, Jan, Timokhin, Andrey, Muñoz, Patricio A., Jessner, Axel, Rievajová, Tatiana, Pohl, Martin, and Büchner, Jörg. Poynting flux transport channels formed in polar cap regions of neutron star magnetospheres. *A&A*, 691:A137, 2024. doi: 10.1051/0004-6361/202450949. URL <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202450949>.
- L. D. Berestetsky, E. M. Lifshits, and L. P. Pitaevsky. *Quantum Electrodynamics*. Pergamon Press, Oxford, 1971.
- V. S. Beskin. Radio pulsars: already fifty years! *Physics Uspekhi*, 61(4):353–380, April 2018. doi: 10.3367/UFNe.2017.10.038216.
- V. S. Beskin and A. Yu Istomin. Pulsar death line revisited - II. 'The death valley'. *MNRAS*, 516(4):5084–5091, November 2022. doi: 10.1093/mnras/stac2423.
- V. S. Beskin and P. E. Litvinov. Pulsar death line revisited - I. Almost vacuum gap. *MNRAS*, 510(2):2572–2582, February 2022. doi: 10.1093/mnras/stab3575.
- V. S. Beskin and A. A. Philippov. On the mean profiles of radio pulsars - I. Theory of propagation effects. *MNRAS*, 425:814–840, September 2012. doi: 10.1111/j.1365-2966.2012.20988.x.
- V. S. Beskin, A. V. Gurevich, and I. N. Istomin. The electrodynamics of a pulsar magnetosphere. *Sov. Phys. JETP*, 58:235–253, August 1983.
- V. S. Beskin, A. V. Gurevich, and Ya. N. Istomin. *Physics of the Pulsar Magnetosphere*. Cambridge University Press, Cambridge, August 1993.
- V. S. Beskin, A. Yu Istomin, and A. G. Mikhaylenko. On the triple pulsar profiles generated by ordinary mode. *MNRAS*, 526(2):1633–1645, December 2023. doi: 10.1093/mnras/stad2731.
- George R. Blumenthal and Robert J. Gould. Bremsstrahlung, Synchrotron Radiation, and Compton Scattering of High-Energy Electrons Traversing Dilute Gases. *Reviews of Modern Physics*, 42(2):237–271, January 1970. doi: 10.1103/RevModPhys.42.237.

- Augusto T. Chantada, Susana J. Landau, Pavlos Protopapas, Claudia G. Scóccola, and Cecilia Garraffo. Cosmology-informed neural networks to solve the background dynamics of the Universe. *Phys. Rev. D*, 107(6):063523, March 2023. doi: 10.1103/PhysRevD.107.063523.
- A. F. Cheng and M. A. Ruderman. A theory of subpulse polarization patterns from radio pulsars. *Astrophys. J.*, 229:348–360, April 1979. doi: 10.1086/156959.
- Alexander Chernoglazov, Alexander Philippov, and Andrey Timokhin. Coherence of multidimensional pair production discharges in polar caps of pulsars. *The Astrophysical Journal Letters*, 974(2):L32, oct 2024. doi: 10.3847/2041-8213/ad7e24. URL <https://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/ad7e24>.
- Ioannis Contopoulos, Demosthenes Kazanas, and Christian Fendt. The Axisymmetric Pulsar Magnetosphere. *Astrophys. J.*, 511(1):351–358, January 1999. doi: 10.1086/306652.
- Fábio Cruz, Thomas Grismayer, Alexander Y. Chen, Anatoly Spitkovsky, and Luis O. Silva. Coherent Emission from QED Cascades in Pulsar Polar Caps. *ApJ*, 919(1):L4, September 2021. doi: 10.3847/2041-8213/ac2157.
- Charles D. Dermer. Compton Scattering in Strong Magnetic Fields and the Continuum Spectra of Gamma-Ray Bursts: Basic Theory. *Astrophys. J.*, 360:197, September 1990. doi: 10.1086/169108.
- I. Dimitropoulos, I. Contopoulos, V. Mpisketzis, and E. Chaniadakis. The pulsar magnetosphere with machine learning: methodology. *MNRAS*, 528(2):3141–3152, February 2024. doi: 10.1093/mnras/stae192.
- Thomas Erber. High-energy electromagnetic conversion processes in intense magnetic fields. *Rev. Mod. Phys.*, 38:626–659, Oct 1966. doi: 10.1103/RevModPhys.38.626. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.38.626>.
- C.-A. Faucher-Giguère and V. M. Kaspi. Birth and Evolution of Isolated Radio Pulsars. *Astrophys. J.*, 643:2401–2414, May 2006. doi: 10.1086/501516.
- P. Goldreich and W. H. Julian. Pulsar Electrodynamics. *Astrophys. J.*, 157:869, August 1969. doi: 10.1086/150119.
- S. E. Gralla, A. Lupsasca, and A. Philippov. Inclined Pulsar Magnetospheres in General Relativity: Polar Caps for the Dipole, Quadrupole, and Beyond. *Astrophys. J.*, 851:137–146, December 2017. doi: 10.3847/1538-4357/aa978d.
- T. H. Hankins and J. M. Rankin. Arecibo Multi-Frequency Time-Aligned Pulsar Average-Profile and Polarization Database. *AJ*, 139:168–175, January 2010. doi: 10.1088/0004-6256/139/1/168.
- H. Herold. Compton and Thomson scattering in strong magnetic fields. *Phys. Rev. D*, 19(10):2868–2875, May 1979. doi: 10.1103/PhysRevD.19.2868.

- Johann A. Hibschan and Jonathan Arons. Pair Production Multiplicities in Rotation-powered Pulsars. *Astrophys. J.*, 560(2):871–884, October 2001a. doi: 10.1086/323069.
- Johann A. Hibschan and Jonathan Arons. Pair Multiplicities and Pulsar Death. *Astrophys. J.*, 554(1):624–635, June 2001b. doi: 10.1086/321378.
- Ya. N. Istomin and D. N. Sobyenin. Electron-positron plasma generation in a magnetar magnetosphere. *Astron. Lett.*, 33:660–672, October 2007. doi: 10.1134/S1063773707100040.
- S. Johnston, M. Kramer, A. Karastergiou, M. J. Keith, L. S. Oswald, A. Parthasarathy, and P. Weltevrede. The Thousand-Pulsar-Array programme on MeerKAT - XI. Application of the rotating vector model. *MNRAS*, 520(4):4801–4814, April 2023. doi: 10.1093/mnras/stac3636.
- C. Kalapotharakos, I. Contopoulos, and D. Kazanas. The extended pulsar magnetosphere. *MNRAS*, 420:2793–2798, March 2012. doi: 10.1111/j.1365-2966.2011.19884.x.
- Diederik Kingma and Jimmy Ba. Adam: A method for stochastic optimization. *International Conference on Learning Representations*, 12 2014.
- S. S. Komissarov. Simulations of axisymmetric magnetospheres of neutron stars. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 367:19–31, 2006. doi: 10.1111/j.1365-2966.2005.09932.x.
- Qinghuan Luo and D.B. Melrose. Cyclotron absorption of radio emission within pulsar magnetospheres. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 325(1):187–196, 07 2001. ISSN 0035-8711. doi: 10.1046/j.1365-8711.2001.04402.x. URL <https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2001.04402.x>.
- A. G. Lyne, C. A. Jordan, F. Graham-Smith, C. M. Espinoza, B. W. Stappers, and P. Weltevrede. 45 years of rotation of the Crab pulsar. *MNRAS*, 446(1):857–864, January 2015. doi: 10.1093/mnras/stu2118.
- Krzysztof Maciesiak, Janusz Gil, and Giorgi Melikidze. On the pulse-width statistics in radio pulsars – III. Importance of the conal profile components. *MNRAS*, 424(3):1762–1773, 08 2012. ISSN 0035-8711. doi: 10.1111/j.1365-2966.2012.21246.x. URL <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.21246.x>.
- R. N. Manchester, G. B. Hobbs, A. Teoh, and M. Hobbs. The australia telescope national facility pulsar catalogue. *Astrophys. J.*, 129(4):1993–2006, apr 2005. doi: 10.1086/428488. URL <https://doi.org/10.1086/428488>.
- S. Markidis. The old and the new: Can physics-informed deep-learning replace traditional linear solvers? *Frontiers in big data*, 4:669097, 2021. doi: <https://doi.org/10.3389/fdata.2021.669097>. URL <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fdata.2021.669097/full>.

- Siddhartha Mishra and Roberto Molinaro. Physics informed neural networks for simulating radiative transfer. *J. Quant. Spectrosc. Radiative Transfer*, 270:107705, August 2021. doi: 10.1016/j.jqsrt.2021.107705.
- E. M. Novoselov, V. S. Beskin, A. K. Galishnikova, M. M. Rashkovetskyi, and A. V. Biryukov. Orthogonal pulsars as a key test for pulsar evolution. *MNRAS*, 494(3):3899–3911, April 2020. doi: 2020MNRAS.494.3899N.
- L. Oster and W. Sieber. Pulsar geometries. III - The hollow-cone model. *Astrophys. J.*, 210:220–229, November 1976. doi: 10.1086/154820.
- Fortunato Pesarin and Luigi Salmaso. The permutation testing approach: a review. *Statistica*, 70(4):481–509, Jan. 2010. doi: 10.6092/issn.1973-2201/3599. URL <https://rivista-statistica.unibo.it/article/view/3599>.
- S. A. Petrova and Y. E. Lyubarskii. Propagation effects in pulsar magnetospheres. *A&A*, 355:1168–1180, March 2000.
- A. Philippov and M. Kramer. Pulsar Magnetospheres and Their Radiation. *ARA&A*, 60: 495–558, August 2022. doi: 10.1146/annurev-astro-052920-112338.
- A. A. Philippov and A. Spitkovsky. Ab Initio Pulsar Magnetosphere: Three-dimensional Particle-in-cell Simulations of Axisymmetric Pulsars. *ApJ*, 785:L33, April 2014. doi: 10.1088/2041-8205/785/2/L33.
- A. A. Philippov, A. Spitkovsky, and B. Cerutti. Ab Initio Pulsar Magnetosphere: Three-dimensional Particle-in-cell Simulations of Oblique Pulsars. *Astrophys. J.*, 801:L19, March 2015. doi: 10.1088/2041-8205/801/1/L19.
- B. Posselt, A. Karastergiou, S. Johnston, A. Parthasarathy, M. J. Keith, L. S. Oswald, X. Song, P. Weltevrede, E. D. Barr, S. Buchner, M. Geyer, M. Kramer, D. J. Reardon, M. Serylak, R. M. Shannon, R. Spiewak, and V. Venkatraman Krishnan. The Thousand-Pulsar-Array programme on MeerKAT - VI. Pulse widths of a large and diverse sample of radio pulsars. *MNRAS*, 508(3):4249–4268, December 2021. doi: 10.1093/mnras/stab2775.
- V. Radhakrishnan and D. J. Cooke. Magnetic Poles and the Polarization Structure of Pulsar Radiation. *Astrophys. Lett.*, 3:225, 1969.
- J. M. Rankin. Toward an empirical theory of pulsar emission. I. Morphological taxonomy. *Astrophys. J.*, 274:333–358, November 1983. doi: 10.1086/161450.
- J. M. Rankin. Toward an empirical theory of pulsar emission. IV - Geometry of the core emission region. *Astrophys. J.*, 352:247–257, March 1990. doi: 10.1086/168530.
- M. A. Ruderman and P. G. Sutherland. Theory of pulsars - Polar caps, sparks, and coherent microwave radiation. *Astrophys. J.*, 196:51–72, February 1975. doi: 10.1086/153393.

- A. Spitkovsky. Time-dependent Force-free Pulsar Magnetospheres: Axisymmetric and Oblique Rotators. *ApJ*, 648:L51–L54, September 2006. doi: 10.1086/507518.
- Petros Stefanou, Jorge F. Urbán, and José A. Pons. Solving the pulsar equation using physics-informed neural networks. *MNRAS*, 526(1):1504–1511, November 2023. doi: 10.1093/mnras/stad2840.
- P. Sturrock. A Model of Pulsar. *Astrophys. J.*, 164:529–556, March 1971.
- T. M. Tauris and R. N. Manchester. On the Evolution of Pulsar Beams. *MNRAS*, 298: 625–636, August 1998. doi: 10.1046/j.1365-8711.1998.01369.x.
- J. H. Taylor and R. N. Manchester. Observed properties of 147 pulsars. *AJ*, 80:794–806, October 1975. doi: 10.1086/111813.
- A. Tchekhovskoy, A. Philippov, and A. Spitkovsky. Three-dimensional analytical description of magnetized winds from oblique pulsars. *MNRAS*, 457:3384–3395, April 2016a. doi: 10.1093/mnras/stv2869.
- A. Tchekhovskoy, A. Philippov, and A. Spitkovsky. Three-dimensional analytical description of magnetized winds from oblique pulsars. *MNRAS*, 457:3384–3395, April 2016b. doi: 10.1093/mnras/stv2869.
- A. N. Timokhin. A model for nulling and mode changing in pulsars. *MNRAS*, 408:L41–L45, October 2010. doi: 10.1111/j.1745-3933.2010.00924.x.
- A. N. Timokhin and J. Arons. Current flow and pair creation at low altitude in rotation-powered pulsars’ force-free magnetospheres: space charge limited flow. *MNRAS*, 429:20–54, February 2013. doi: 10.1093/mnras/sts298.
- A. N. Timokhin and A. K. Harding. On the Polar Cap Cascade Pair Multiplicity of Young Pulsars. *Astrophys. J.*, 810:144, Sep 2015. doi: 10.1088/0004-637X/810/2/144.
- Elizabeth A. Tolman, A. A. Philippov, and A. N. Timokhin. Electric Field Screening in Pair Discharges and Generation of Pulsar Radio Emission. *ApJ*, 933(2):L37, July 2022. doi: 10.3847/2041-8213/ac7c71.
- P. F. Wang, J. L. Han, J. Xu, C. Wang, Y. Yan, W. C. Jing, W. Q. Su, D. J. Zhou, and T. Wang. FAST Pulsar Database. I. Polarization Profiles of 682 Pulsars. *Research in Astronomy and Astrophysics*, 23(10):104002, October 2023. doi: 10.1088/1674-4527/acea1f.
- P. Weltevrede and S. Johnston. Profile and polarization characteristics of energetic pulsars. *MNRAS*, 391:1210–1226, December 2008. doi: 10.1111/j.1365-2966.2008.13950.x.
- B. Zhang, G. J. Qiao, W. P. Lin, and J. L. Han. Three Modes of Pulsar Inner Gap. *Astrophys. J.*, 478(1):313–321, March 1997. doi: 10.1086/303787.

М. О. Торопов, С. А. Тюльбашев, and В. С. Бескин. Поиск интерпульсов в полной выборке пульсаров на частоте 111 МГц. *Астрономический журнал*, 101(12):1084–1094, 2024. ISSN 0004-6299. URL <https://journals.rcsi.science/0004-6299/article/view/276064>.